المعطى :-

تمرين (1) : إذا كانت دالة المنفعة هي :-

$$U = X_1 + 2X_2 + 20X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 - 3X_3^2$$

وكانت الأسعار $P_1 = 1$ ، $P_2 = 1$ ، $P_3 = 2$ ودخل المستهلك

$I = 10$.

المطلوب :- إيجاد قيم X_1 ، X_2 ، X_3 التي يشتريها المستهلك حتى يحقق التوازن

الحل

نقوم بتكوين صيغة لاجرانج تحت القيد :

$$10 = X_1 + X_2 + 2X_3$$

وبالتالي :-

$$V = X_1 + 2X_2 + 20X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 - 3X_3^2 - \lambda(10 - X_1 - X_2 - 2X_3)$$

وبأخذ المشتقات الجزئية الأولى للمتغيرات X_1 ، X_2 ، X_3 ، λ ومساواتها بالصفر نجد

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial X_1} = 1 + X_2 - \lambda = 0$$

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial X_2} = 2 + X_1 - X_3 - \lambda = 0$$

$$V_3 = \frac{\partial V}{\partial X_3} = 20 - X_2 - 6X_3 - 2\lambda = 0$$

$$V_\lambda = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 10 - X_1 - X_2 - 2X_3 = 0$$

وبحل المعادلات السابقة باستخدام المحددات نحصل على النتائج الآتية :-

$$X_1 = 4 \text{ , } X_2 = 4 \text{ ، } X_3 = 1 \text{ ، } \lambda = 5$$

وهذه قيم المتغيرات التي تحقق الشرط الضروري لوجود المنفعة العظمى للدالة U.

ولتحقيق الشرط الثاني نحسب قيم مكونات محددات هيسيان ، وهذه هي الـ (H_3 ، H_2) .

$$V_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial X_1^2} = 0 \text{ ، } V_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2^2} = 1 \text{ ، } V_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial X_3^2} = 0$$

$$V_{21} = 1 \text{ ، } V_{22} = 0 \text{ ، } V_{23} = -1 \text{ ، } V_{31} = 0 \text{ ، } V_{32} = -1$$

$$\text{، } V_{33} = -6 \text{ ، } V_{1\lambda} = -1 \text{ ، } V_{2\lambda} = -1 \text{ ، } V_{3\lambda} = -2$$

$v\lambda_1 = -1$ ، $v\lambda_2 = -1$ ، $v\lambda_3 = -2$ ، $v\lambda = 0$

وبذلك تكون محددات هيسيان المطوقة هي

$$\bar{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$\bar{H}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

وبما أن $\bar{H}_2 > 0$ ، $\bar{H}_3 < 0$ فإن الشرط الكافي لوجود النهاية العظمى لـ U تكون متحقق.

ولهذا يحقق المستهلك أقصى منفعة أو إشباع كلي عندما يستهلك 4 وحدات من السلعة الأولى ، 4 وحدات من السلعة X_2 ووحدة واحدة من السلعة X_3 ، وتكون القيمة العظمى لدالة المنفعة هي $U_{max} = \boxed{41}$

تمرين : إذا كانت دالة المنفعة هي $U = (X_1+2)(X_2+1)$

وكانت الأسعار هي $P_1 = 4$ ، $P_2 = 6$ ، ودخل المستهلك $I = 130$

المطلوب: إيجاد قيمة X_1 ، X_2 التي تحقق التوازن؟

$V_{\lambda_1} = -1$ ، $V_{\lambda_2} = -1$ ، $V_{\lambda_3} = -2$ ، $V_{\lambda\lambda} = 0$

وبذلك تكون محددات هيسيان المطوقة هي

$$\bar{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

$$\bar{H}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -3 < 0$$

وطالما أن $\bar{H}_2 > 0$ ، $\bar{H}_3 < 0$ فإن الشرط الكافي لوجود النهاية العظمى للدالة U تكون ~~متحقق~~ متحقق.

ولهذا يحقق المستهلك أقصى منفعة أو إشباع كلي عندما يستهلك ٤ وحدات من السلعة الأولى ، ٤ وحدات من السلعة X_2 ووحدة واحدة من السلعة X_3 ، وتكون القيمة العظمى لدالة المنفعة هي $U_{max} = \boxed{41}$

تمرين: إذا كانت دالة المنفعة هي $U = (X_1+2)(X_2+1)$

وكانت الأسعار هي $P_1 = 4$ ، $P_2 = 6$ ، دخل المستهلك $I = 130$

المطلوب.. إيجاد قيمة X_1 ، X_2 التي تحقق التوازن؟

المثال :

تمرين ١ : إذا كانت دالة المنفعة هي :

$$U = X_1 + 2X_2 + 20X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 - 3X_3^2$$

وكانت الأسعار $P_1 = 1$ ، $P_2 = 1$ ، $P_3 = 2$ ودخل المستهلك

$$I = 10$$

المطلوب : إيجاد قيم X_1 ، X_2 ، X_3 التي يشتريها المستهلك حتى يحقق التوازن

الحل

نقوم بتكوين صيغة لاجرانج كما يلي :

$$10 = X_1 + X_2 + 2X_3$$

وبالتالي :

$$V = X_1 + 2X_2 + 20X_3 + X_1X_2 - X_2X_3 - 3X_3^2 - \lambda(10 - X_1 - X_2 - 2X_3)$$

وبأخذ المشتقات الجزئية الأولى للمتغيرات X_1 ، X_2 ، X_3 ، λ ومساواتها بالصفر نجد

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial X_1} = 1 + X_2 - \lambda = 0$$

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial X_2} = 2 + X_1 - X_3 - \lambda = 0$$

$$V_3 = \frac{\partial V}{\partial X_3} = 20 - X_2 - 6X_3 - 2\lambda = 0$$

$$V_\lambda = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 10 - X_1 - X_2 - 2X_3 = 0$$

وبحل المعادلات السابقة باستخدام المحددات نحصل على النتائج التالية :

$$X_1 = 4 ,\ X_2 = 4 ,\ X_3 = 1 ,\ \lambda = 5$$

وهي قيم المتغيرات التي تحقق الشرط الضروري لوجود النهاية العظمى للدالة U.

ولتحقيق الشرط الثاني نحسب قيم مكونات محددات هيسيان، والتي هي محددات (H_3 ، H_2).

$$V_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial X_1^2} = 0 ,\ V_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2} = 1 ,\ V_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial X_3} = 0$$

$$V_{21} = 1 ,\ V_{22} = 0 ,\ V_{23} = -1 ,\ V_{31} = 0 ,\ V_{32} = -1$$