الباب الأول

المنطق الرياضي

MATHEMATICAL LOGIC

مقدمة: Introduction

من المعروف أن الرياضيات تعتمد على التفكير المنطقي للوصول إلى نتيجة محددة ومقبولة وواضحة لا لبس فيها ولا تقبل التأويل، ويبدأ هذا بفحص المعطيات وتوظيفها للوصول إلى المطلوب من خلال سلسلة من الأفكار والاستنتاجات الفرعية المنطقية المتماسكة غير المتناقضة إلى أن نصل إلى النتيجة النهائية المطلوبة. ومن أجل ذلك اتفق الرياضيون على وضع أسس ومضمون علم المنطق الرياضي حتى يتمكنوا من الوصول إلى النتائج المقبولة بطريقة ميسرة وواضحة ومختصرة، ولذلك كان لا بد أن يعتمد هذا العلم على أسس قوية وثابتة تفرض وجودها على التفكير الذي لا يقبل سواها، وتلك الأسس تسمى مبادئ المنطق، كما كان لابد أن يتضمن هذا العلم أدوات تعين الرياضيين على ربط المفاهيم والجمل الرياضية بعضها البعض لتكوين مفهوم مركب ،على أن يكون لكل أداة من تلك الأدوات المعنى المحدد الواضح. وأخيراً كان لابد من وجود رموز تستعمل كلغة رياضية لكتابة المفاهيم والجمل الرياضية بطريقة مبسطة ومختصرة على أن يعطى لكل رمز المعنى المحدد له.

يتضح لنا مما تقدم مدى حاجة طالب الرياضيات للتعرف على علم المنطق الرياضي وذلك للاستعانة به كلغة لكتابة الرياضيات، خاصة الحديثة وذلك بطريقة مختصرة وواضحة وصحيحة. لهذا فإننا سنعرض خلال هذا الباب أسس علم المنطق الرياضي وأدواته بطريقة موجزة ومركزة.

١ــ١ التقرير : Proposition

انتهينا إلى أن علم المنطق الرياضي هو بمثابة لغة للرياضيين حيث يمكنهم بواسطتها تكوين الجمل الرياضية والتي منها ما هو إنشائي، ومنها ما هو خبري يقدم مفهوماً معيناً للسامع، وهذا المفهوم قد نقبله ونسلم به "نصدقه" وقد نرفضه "نكذبه"، وسوف نهتم بدراسة النوع الثاني ــ أي الجمل الخبرية ــ والذي يسمى تقريرا (proposition) وهو تلك العبارات التي تقدم مفهوماً يحتمل إما الصدق وإما الكذب.

مثال ١ـ١ـ١ :

القول بأن "للمعادلة $x^4 = 1$ جذران فقط" تقرير كاذب حيث لا يتفق مع النظرية الأساسية للجبر والتي تجعل للمعادلة $x^4 = 1$ أربعة جذور .

مثال ١ـ١ـ٢:

القول بأن "جذرى المعادلة $x^2 - 8x + 15 = 0$ هما العددان 3 ، 5" تقرير صادق.

لا شك أن الحكم على تقريرٍ ما بالصدق أو بالكذب يعتمد على المبادئ والأسس التي اتفق عليها من لهم علاقة بهذا التقرير، فلو قلنا مثلاً " مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي $180°$" فإننا أمام تقرير صادق في الهندسة المستوية وفي نظر المتمسكين فقط بالهندسة الإقليدية، وقد يكون التقرير ذاته كاذباً في هندسة أخرى مثل الهندسة الكرية وفي نظر غير المتمسكين بالهندسة إقليدية. متفقين على أن المنطق الرياضي هو لغة رياضية يستعملها الرياضيون في تحليل المفاهيم والمبادئ الرياضية، وكذلك في تفسير الطرق التي توظف للوصول

إلى الحقيقة والتماس الشروط التي تجعل تقريراً ما صادقاً في إطار المبادئ المتفق عليها. تستخدم الحروف الكبيرة $A, B, C, \ldots$ لتدل على تقارير كما يدل الحرف T أو العدد 1 على قيمة الصدق لتقرير صادق منطقيا، ويدل الحرف F أو العدد 0 على قيمة الصدق لتقرير غير صادق منطقيا ، وفي دراستنا هذه سوف نستعمل العددين 0 ، 1 ليدلا على قيمتي الصدق لتقرير صادق منطقيا وتقرير كاذب منطقيا على الترتيب.

تعريف ١ـ١ـ١:

التقرير البسيط هو مفهوم رياضي في صورة جملة خبرية لا يمكن تجزئتها إلى جملتين خبريتين مفيدتين.

تعريف ١ـ١ـ٢ :

التقرير المركب هو مجموعة من التقارير البسيطة المرتبطة ببعضها البعض بواسطة بعض أدوات الربط، مثل "أو"، "و"، "مع أن"، "إذا وفقط إذا".

مثال ١ـ١ـ٣:

القول بأن "15 عدد فردي وغير أولي" هو تقرير مركب من تقريرين بسيطين، الأول هو "15 عدد فردي"، والثاني هو "15 عدد غير أولي" وتم الربط بينهما بالأداة "و".

كما سنرى أن قيمة الصدق للتقرير المركب سوف تحدد تماما من خلال قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له، مع الأخذ في الاعتبار طبيعة كل أداة من أدوات الربط المستخدمة في التقرير المركب.

١ــ٢ مبادئ المنطق:

يعتمد المنطق على قبول الفكر للمبادئ الثلاثة الآتية :

١ – مبدأ الذاتية :

مبدأ الذاتية، هو الذي يحكم الفكر على أساسه أن الشيء المحدد يبقى هو هو بذاته مهما تنوع سياق عرضه، ويعبرون عن هذا المبدأ تعبيراً رمزياً بالقول : " A هو A "

٢ – مبدأ عدم التناقض:

مبدأ عدم التناقض، هو الذي يحكم الفكر على أساسه بعدم وصف الشيء بصفة ما مع نفيها عن الشيء ذاته في آن واحد. ويعبرون عن قانون عدم التناقض تعبيراً رمزياً بالقول : " لا يكون A ونفي A في آن واحد" وللاختصار يقال : " لا يكون A و $\sim A$ في آن واحد " حيث الرمز $\sim A$ هو نفي A .

٣ – مبدأ الأول وإلا فالثاني :

مبدأ الأول وإلا فالثاني، هو الذي يحكم الفكر على أساسه بأن يوصف الشيء إما بالصفة وإما بنقيضها. ويعبرون عن هذا المبدأ رمزياً بالقول : " A أو $\sim A$ " حيث "أو" هنا تعني التخيير وهذا يعني الأول وإلا فالثاني.

مثال ١ـ٢ـ١ :

القول بأن "العدد الصحيح n إما زوجي وإلا فهو فردي" حيث لا يوجد وصف ثالث للعدد n من حيث قابلية القسمة على 2.

١ ــ ٣ جبر التقارير

إن مهمة جبر التقارير تتركز في تكوين التقارير المركبة، ثم تطبيق الأسس والمبادئ المنطقية على هذه التقارير لاستنتاج قيمة الصدق لها اعتماداً على قيم

الصدق للتقارير البسيطة المكونة لكل تقرير مركب، وذلك مع الأخذ في الاعتبار طبيعة كل أداة من أدوات الربط المستخدمة في ربط التقارير البسيطة لتكوين التقرير المركب. لذلك وجب التأكيد على ضرورة تحديد طبيعة كل أداة من أدوات الربط،كما لا يقبل أن تستخدم الأداة في أكثر من معنى، خاصة في الرياضيات. وعلى ذلك اتفق الرياضيون على تحديد معنى وحيد لا لبس فيه ولا غموض لكل أداة ربط. وقبل التعرف على بعض أدوات الربط والتي تسمى بدوال الصدق، سوف نعرض الاحتمالات الممكنة لقيم الصدق المناظرة للتقارير البسيطة التي تكون تقريرين مركبين، الأول يتكون من تقريرين بسيطين A ، B والثاني يتكون من ثلاثة تقارير بسيطة A ، B ، C وذلك من خلال الجدولين الآتيين .

A	B
1	1
1	0
0	1
0	0

جدول (١)

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

جدول (٢)

١ــ٤ دوال الصدق (أدوات الربط) Truth functions

١ – دالة النفي Negation function

دالة النفي هي أبسط دوال الصدق ومضمونها هو " إذا كان A تقريراً فإن نفيه يرمز له بالرمز $\sim A$ " ومن الواضح أن التقريرين A ، $\sim A$ مختلفان في قيم الصدق وهذا يتفق مع قانون عدم التناقض . جدول (٣) يتضمن قيم الصدق للتقريرين A و $\sim A$ ويسمى جدول الصدق لدالة النفي.

A	$\sim A$
1	0
0	1

جدول (٣)

مثال ١ـ٤ـ١ :

أوجد قيمتي الصدق للتقريرين الآتيين :

(i) لا تحاط الجزيرة بالمياه.

(ii) $6<10$

الحل :

(i) هذا التقرير هو نفي التقرير "الجزيرة تحاط بالمياه" وهو تقرير صادق له قيمة الصدق 1 ،إذن قيمة الصدق للتقرير "لا تحاط الجزيرة بالمياه" تساوي صفراً.

(ii) هذا التقرير هو نفي التقرير " $10 \geq 6$" الذي له قيمة الصدق 0 وعلى ذلك فإن قيمة الصدق للتقرير " $10 > 6$" تساوي 1 .

٢ – دالة الوصل Conjunction function:

إذا ارتبط التقريران A و B بأداة الربطة "و" فإننا نحصل على تقرير مركب يقرأ A ، B ويرمز له بالرمز $A \wedge B$ ويأخذ قيمة الصدق 1 في حالة واحدة فقط، وهي عندما تكون قيمة الصدق لكل من التقريرين A ، B تساوي 1، ودون ذلك يأخذ قيمة الصدق صفراً (انظر جدول (٤)).

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

جدول (٤)

مثال ١ـ٤ـ٢ :

أوجد قيمتي الصدق للتقريرين المركبين الآتيين :

(أ) $6 \neq 3 \div 18$ والقاهرة من المدن الكبرى.

(ب) المسلم يحب المدينة المنورة و $X + Y = 3$ معادلة خط مستقيم.

الحل:

(أ) نفرض أن A هو التقرير " $6 \neq 3 \div 18$" وبالطبع قيمة الصدق له تساوي صفراً، لأنه نفي التقرير الصادق منطقيا " $6 = 3 \div 18$"، وبفرض أن B هو تقرير "القاهرة من المدن الكبرى" فهو بالطبع تقرير صادق منطقيا يأخذ قيمة الصدق 1، لأن القاهرة بالفعل من المدن الكبرى. على ذلك نجد أن قيمة الصدق للتقرير المركب $A \wedge B$ هي

صفر، أي أن قيمة للتقرير المركب (أ) تساوي 0.

(ب) نفرض أن C هو التقرير "المسلم يحب المدينة المنورة" وهو بالطبع تقرير صادق، لأنها مدينة رسول الله صلى الله عليه وسلم ومعشوقة المسلمين وبالتالي فإن قيمة الصدق لهذا التقرير تساوي 1. وبفرض أن D هو التقرير "$X + Y = 3$ هي معادلة خط مستقيم" فهو تقرير صادق وله قيمة الصدق 1. وعلى ذلك فإن قيمة الصدق للتقرير (ب) تساوي 1 .

٣ – دالة الفصل Disjunction function:

مقدمة :

قد نستخدم في حياتنا اليومية حرف " أو " بمعنى التخيير، أي : إما ما قبل الحرف "أو" وإلا فالذي بعد الحرف "أو" في الجملة التي تربط بواسطة الحرف "أو"، ولا يجوز الجمع بين الاثنين معاً، ومثال ذلك " عليك بالوقوف أو الجلوس" فلا يمكن الجمع بين الوضعين في نفس الوقت، ولكن إما أن تقف وإلا تجلس. إلا أن حرف "أو" والذي يسمى حرف الفصل هو الذي يعنينا في دراستنا هذه، وله معنى واستعمال يتضحان من المثال التالي.

مثال ١ـ٤ـ٣ :

التقرير المركب "سوف أقابل أحمد أو محمود" له قيمة الصدق 1 في الحالات الثلاث الآتية:

(١) بالفعل حدث أن قابلت أحمد و لم أقابل محموداً.

(٢) بالفعل حدث أن قابلت محمود و لم أقابل أحمد.

(٣) بالفعل حدث أن قابلت أحمد وقابلت محموداً. ويأخذ قيمة الصدق 0 في حالة واحدة عندما لا أقابل كلا من أحمد ومحمود. حرف الفصل "أو" بهذا المعنى يسمى حرف الإباحة ، أي : يبيح حدوث ما قبله وما بعده في الجملة في نفس الوقت، وهذا هو المعنى المعمول به والمتفق عليه بين الرياضيين.

على ما تقدم نقول إذا ارتبط التقريران A ، B بواسطة دالة الفصل "أو" سوف نحصل على تقرير مركب، سنرمز له بالرمز $A \vee B$ ويقرأ : A أو B، ويأخذ قيمة الصدق 1 إذا كانت قيمة الصدق لتقرير واحد على الأقل من التقريرين A ، B تساوي 1. ويأخذ قيمة الصدق 0 إذا كانت قيمة الصدق لكل من التقريرين A،B صفراً ، ويمكن تعميم ذلك على تقرير مركب من أكثر من تقريرين بسيطين ،حيث يأخذ التقرير المركب قيمة الصدق 1 إذا كان أحد التقارير البسيطة المكونة له يأخذ قيمة الصدق 1، كما يأخذ التقرير المركب قيمة الصدق 0 إذا كانت قيم الصدق لكل التقارير البسيطة أصفاراً.نستطيع الآن أن نكون جدول الصدق للتقرير المركب $A \vee B$ كما هو مبين بجدول (٥) وعلى النحو التالي :

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

جدول (٥)

٤ – دالة الإلزام الشرطية Conditional function :

إن دالة الإلزام الشرطية والتي تسمى أحياناً دالة الاقتضاء هي بمعنى "إذا كان A فإن B" أو بمعنى أوضح "تحقيق A يقتضي تحقيق B". فإذا ارتبط التقريران A ، B بواسطة دالة الاقتضاء فإننا نحصل على تقرير مركب، يرمز له بالرمز $A \rightarrow B$ ويقرأ : A يؤدي إلى B ، ويتضمن جدول (٦) قيم الصدق للتقرير المركب $A \rightarrow B$.

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

جدول (٦)

لا شك أن قيم الصدق لهذه الدالة أحياناً تثير الجدل، ولا سيما في الحالة التي تكون قيمة الصدق للتقرير $A \rightarrow B$ تساوي 1 عندما تكون قيمة الصدق للتقرير A تساوي 0 ، وقيمة الصدق للتقرير B تساوي 1، ولكن يجب ملاحظة أن دالة الاقتضاء تعني أن التقرير B لابد من صدقه إذا ما صدق A ، ولكن إن لم يصدق التقرير A فليس هناك من قيود على التقرير B ،بل يجوز أن يكون صادقاً ويجوز أن يكون كاذباً.

إن بناء جدول الصدق لدالة الاقتضاء ليس بالسهولة التي قد تتسم بها جداول الصدق لبعض الدوال الأخرى، إلا أنه ومن حسن الحظ قد أمكن بناء جدول الصدق لدالة الاقتضاء اعتماداً على دوال الصدق $(\wedge , \vee , \sim)$، ويتضح

ذلك من المثال التالي بعد الأخذ في الاعتبار أن التكافؤ المنطقي لتقريرين مركبين يعنى تساوي قيم الصدق المتناظرة لهما.

مثال ١ـ٤ـ٤ :

للتقرير المركب "إذا أخلصت في مذاكرتك نجحت بتفوق"، نعتبر أن A هو تقرير الإخلاص في المذاكرة، وأن B هو تقرير النجاح بتفوق ،فإن التقرير المركب $A \rightarrow B$ يمكن إعادة صياغته دون أدنى تغيير في المعنى من خلال الصياغتين الآتيتين :

(أ)" إما لا تخلص في المذاكرة أو ستنجح بتفوق" أي $\sim A \vee B$

(ب) " لا يقبل أن تذاكر بإخلاص ولا تنجح بتفوق " أي $\sim (A \wedge \sim B)$،وسوف يبين الجدول الآتي مدى تطابق التقارير الثلاثة: $A \rightarrow B$ ، $\sim A \vee B$ ، $\sim (A \wedge \sim B)$، وللاختصار سوف نرمز للتقرير المركب $A \rightarrow B$ بالرمز α، وللتقرير المركب $\sim A \vee B$ بالرمز β، وللتقرير المركب $\sim (A \wedge \sim B)$ بالرمز γ.

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \wedge \sim B$	α	β	γ
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

جدول (٧)

نلحظ تطابق قيم الصدق المتناظرة في الأعمدة الثلاثة الأخيرة بالجدول وهذا يعني أن التقارير الثلاثة $A \rightarrow B$، $\sim A \vee B$ ، $\sim (A \wedge \sim B)$ متكافئة منطقيا.

٥ – الدالة الشرطية المزدوجة Biconditional function

الدالة الشرطية المزدوجة أو دالة التكافؤ تستعمل في تكوين تقرير مركب من التقريرين A ، B على النحو التالي "يكون A إذا وفقط إذا كان B" وتقرأ أحياناً "يتحقق A إذا وفقط إذا تحقق B "وتقرأ كذلك "أن تحقيق A هو الشرط الضروري والكافي لتحقيق B، وهذا يعني "إذا كان A فإن B وإذا كان B فإن A "،أي أن $A \to B \wedge B \to A$ ويرمز للدالة الشرطية المزدوجة بالرمز $A \Leftrightarrow B$ ، وعلى ما تقدم يمكن بناء جدول الصدق للدالة الشرطية المزدوجة على النحو التالي :

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

جدول (٨)

نلحظ من جدول الصدق السابق أن التقرير المركب $A \Leftrightarrow B$ يأخذ قيمة الصدق 1 عند تساوي قيمتي الصدق للتقريرين A ، B ويأخذ قيمة الصدق 0 عند اختلاف قيمتي الصدق للتقريرين A ، B .

١ – ٥ القانون والتناقض والتكافؤ المنطقي :

تعريف ١ــ٥ــ١ :

القانون المنطقي هو تقرير مركب من تقارير بسيطة مرتبطة ببعضها البعض بواسطة بعض دوال الصدق $(\Leftrightarrow, \to, \wedge, \vee, \sim)$، ويأخذ دائما قيمة الصدق 1 مهما كانت قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له.

مثال ١ـ٥ـ١ :

أثبت أن كلا من التقارير المركبة الآتية قانونا منطقيا :

(أ) $A \Leftrightarrow A$ (ب) $\sim(A \wedge \sim A)$ (جـ) $A \vee \sim A$

الحل :

(أ) نكون جدول الصدق للتقرير المركب $A \Leftrightarrow A$ ، كما هو مبين بالجدول الآتي:

A	A	$A \Leftrightarrow A$
1	1	1
0	0	1

جدول (٩)

واضح من الجدول أن قيم الصدق للتقرير المركب $A \Leftrightarrow A$ دائماً تأخذ القيمة الصدق 1 ، وبالتالي هو قانون مع ملاحظة أن هذا القانون هو أحد مبادئ علم المنطق (المبدأ الأول) ونصه "A هو A " ويسمى مبدأ الذاتية.

(ب) جدول الصدق للتقرير المركب $\sim(A \wedge \sim A)$ هو على النحو التالي:

A	$\sim A$	$A \wedge \sim A$	$\sim(A \wedge \sim A)$
1	0	0	1
0	1	0	1

جدول (١٠)

من خلال الجدول يتضح أن التقرير المركب $\sim(A \wedge \sim A)$ يأخذ دائماً قيمة الصدق 1 وبالتالي فهو قانون، والجدير بالإشارة أن هذا القانون هو أحد مبادئ علم المنطق الرياضي (المبدأ الثاني) والذي ينص على : "من الخطأ أن يكون A ونفي A في آن واحد"، ويسمى مبدأ عدم التناقض.

(جـ) جدول الصدق للتقرير المركب $A \vee \sim A$ هو كما يلي.

A	$\sim A$	$A \vee \sim A$
1	0	1
0	1	1

جدول (١١)

يتضح من الجدول أن التقرير المركب $A \vee \sim A$ يأخذ دائماً قيمة الصدق 1، وعلى ذلك فهو قانون، والجدير بالإشارة أن هذا القانون هو أحد مبادئ علم المنطق الرياضي (المبدأ الثالث)، والذي ينص على " الأول وإلا فالثاني".

تعريف ١ـ٥ـ٢ :

التناقض المنطقي هو تقرير مركب من تقارير بسيطة مرتبطة ببعضها البعض بواسطة بعض دوال الصدق الخمسة $(\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow)$، ويأخذ دائماً قيمة الصدق 0 مهما كانت قيم الصدق للتقارير البسيطة المكونة له .

مثال ١ـ٥ـ٢:

التقرير المركب $A \wedge \sim A$ تتناقض حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق 0 كما هو مبين بالعمود الثالث بجدول الصدق (١٠).

ملحوظة :

إن لم يكن التقرير المركب قانونا منطقيا أو تناقضا منطقيا، فيقال إنه غير ذلك، أي لا هو قانون ولا هو تناقض، وهذا يحدث بالطبع عندما تكون قيم الصدق من بينها قيمة على الأقل تساوي 0، وقيمة على الأقل تساوي 1.

ملحوظة:

سوف نتناول فيما يلي دراسة بعض التقارير لمعرفة ما إذا كانت قانونا منطقيا أو تناقضا منطقيا أو غير ذلك، مع ملاحظة أن المقصود بدراسة أي تقرير تعني توضيح ما إذا كان التقرير قانونا منطقيا أم تناقضا منطقيا أم غير ذلك.

مثال ١ـ٥ـ٣ :

ادرس التقارير المركبة الآتية :

١ – $(A\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$

٢ – $\sim(A\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow(\sim A\vee(\sim B\wedge\sim C))$

٣ – $(A\wedge\sim B)\rightarrow(\sim B\wedge\sim C)$

الحل :

١ – للاختصار سوف نرمز للتقرير المركب $A\wedge(B\vee C)$ بالرمز α وللتقرير المركب $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ بالرمز β، وللتقرير المركب المطلوبة دراسته $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ بالرمز γ،

وعلى ذلك يكون جدول الصدق للتقرير المركب كما يلي:

A	B	C	$A\wedge B$	$A\wedge C$	$B\vee C$	α	β	γ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

جدول (١٢)

قيم الصدق بالعمود الأخير من الجدول تبين أن التقرير المركب المعطى هو قانون منطقي حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق 1 .

٢ – للاختصار سوف نرمز للتقرير المركب $(\sim B \wedge \sim C)$ بالرمز α، وللتقرير المركب $A \wedge (B \vee C)$ بالرمز β، وللتقرير المركب $\sim A \vee (\sim B \wedge \sim C)$ بالرمز γ ،وللتقرير المركب $\sim (A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow \sim A \vee (\sim B \wedge \sim C)$ بالرمز δ، (لاحظ أن التقرير المركب $\sim (A \wedge (B \vee C))$ سيكون $(\sim \beta)$ ، وبذلك نكون جدول الصدق للتقرير المركب $\sim (A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow \sim A \vee (\sim B \wedge \sim C)$ ،على النحو التالي:

A	B	C	$\sim A$	$\sim B$	$\sim C$	$B \vee C$	α	β	$\sim\beta$	γ	δ
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1

جدول (١٣)

يتضح من قيم الصدق في العمود الأخير من الجدول أن التقرير المركب المعطى هو قانون منطقي، حيث يأخذ دائماً قيمة الصدق ١ .

٣ – نكون جدول الصدق الخاص بالتقرير المركب $(A \wedge \sim B) \rightarrow (\sim B \wedge \sim C)$، آخذين في الاعتبار أننا سوف نرمز للتقرير له بالرمز α .

A	B	C	$\sim B$	$\sim C$	$A\wedge \sim B$	$\sim B\wedge \sim C$	α
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	1

جدول (١٤)

هذا التقرير لا هو قانون منطقي ولا هو تناقض منطقي، حيث لا يخلو من إحدى قيم الصدق التي تساوي صفراً، وأيضاً لا يخلو من إحدى قيم الصدق التي تساوي 1.

عند دراسة أي تقرير مركب معتمداً على بعض الشروط فإننا نعتبر هذه الشروط مبادئ وأسساً اتفق عليها من لهم علاقة بهذا التقرير . كما أن تلك الشروط قد تيسر الحصول على قيمة (قيم) الصدق للتقرير مباشرة أو عن طريق جدول بسيط ، وسوف يتضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية :

مثال ١ـ٥ـ٤:

إذا علمت أن قيمة الصدق للتقرير المركب $A\vee B$ تساوي صفراً أوجد قيمة الصدق للتقرير المركب : $A\vee \sim B$.

الحل :

من معرفتنا لدالة الفصل "$\vee$" يتضح أن التقرير المركب $A\vee B$ يأخذ قيمة الصدق 0 في حالة واحدة فقط، ألا وهي عندما تكون قيمة الصدق للتقرير A

تساوي 0 ، وقيمة الصدق للتقرير B تساوي 0 ،وعليه فإن قيمة الصدق للتقرير $B \sim$ تساوي 1، وبذلك تكون قيمة الصدق للتقرير المركب $A \vee \sim B$ تساوي 1.أي أن التقرير المركب $A \vee \sim B$ تحت الشرط المعطى تعد قانوناً منطقيا رغم أنه في الحالة العامة غير ذلك .

مثال ١ـ٥ـ٥:

بفرض أن قيمة الصدق للتقرير المركب $A \to (B \vee \sim C)$ تساوي صفراً. أوجد قيمة الصدق للتقرير المركب $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \wedge C)$.

الحل :

قيمة الصدق للتقرير المركب $A \to (B \vee \sim C)$ تساوي صفراً تعني أن قيمة الصدق للطرف الأيسر (التقريرA) تساوي 1، وقيمة الصدق للطرف الأيمن (التقرير $B \vee \sim C$) تساوي صفراً في الوقت نفسه. والأخير لا يتحقق إلا إذا كانت قيمة الصدق لكل من التقريرين B ، $C \sim$ تساوي صفراً، وذلك من طبيعة دالة الربط "$\vee$" وهذا يؤدي إلى أن قيمة الصدق للتقريرB تساوي صفراً، وقيمة الصدق للتقرير C تساوي 1.من الاستنتاجات السابقة يكون المطلوب إيجاد قيمة الصدق للتقرير المركب $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \wedge C)$ عندما تكون قيمة الصدق للتقرير A تساوي1 ، وقيمة الصدق للتقريرB تساوي صفراً ،وقيمة الصدق للتقرير C تساوي 1،بالتعويض المباشر نجد أن قيمة الصدق المطلوبة تساوي 0، أي أن هذا التقرير المركب تحت الشروط المذكورة أصبح تناقضا منطقيا رغم أنه ليس كذلك في الصورة العامة، أي بدون الشروط المذكورة.

مثال ١ـ٥ـ٦:

إذا علمت أن قيمة الصدق للتقرير المركب $(\sim B \wedge A) \Leftrightarrow (A \vee B)$ تساوي1، أوجد قيمة (قيم) الصدق للتقرير المركب $(A \to \sim B) \to (\sim B \to \sim A)$.

الحل :

التقرير المركب $(\sim B \wedge A) \Leftrightarrow (A \vee B)$ يأخذ قيمة الصدق 1 في حالتين هما:

(أ) قيمة الصدق للتقرير $A \vee B$ تساوي 1، وعليه فإن قيمة الصدق لأحد التقريرين أو كليهما تساوي 1 ، وفي الوقت نفسه تكون قيمة الصدق للتقريرالمركب $\sim B \wedge A$ تساوي 1 وعليه فإن قيمة الصدق لكل من التقريرين $\sim B$، A تساوي 1 ، أي أن قيمة الصدق للتقرير A تساوي 1، وقيمة الصدق للتقرير $\sim B$ تساوي 1 والتي تؤدي إلى أن قيمة الصدق للتقرير B تساوي صفراً، وطالما أن قيمة الصدق للتقرير B تساوي0 ، فلابد أن قيمة الصدق للتقرير A تساوي 1 في التقرير المركب $A \vee B$.

(ب) قيمة الصدق للتقرير المركب $A \vee B$ تساوي صفراً ،وقيمة الصدق للتقرير المركب $\sim B \wedge A$ تساوي صفراً ، وهذا يؤدي إلى أن قيمة الصدق للتقرير A تساوي 0 ،وقيمة الصدق للتقرير B تساوي 0 (تختار القيم التي تحقق طرفي التقرير المركب $(\sim B \wedge A) \Leftrightarrow A \vee B$).

مما تقدم يكون المطلوب هو إيجاد قيمة الصدق للتقرير المركب $(A \to \sim B) \to (\sim B \to \sim A)$ في الحالتين الآتيتين :

(١) قيمة الصدق للتقرير A تساوي 1، وقيمة الصدق للتقرير B تساوي 0 .

(٢) فيه الصدق للتقرير A تساوي 0، وقيمة الصدق للتقرير B تساوي 0.

وبالتعويض المباشر في التقرير المركب نحصل على الآتي :

في الحالة (١) تكون قيمة الصدق للتقرير المركب المعطى، هي 0 ،وفي الحالة (٢) تكون قيمة الصدق للتقرير المركب المعطى مساوية 1 ، أي أن التقرير المعطى تحت الشروط المذكورة لا هو قانون ولا هو تناقض.

حل آخر :

يمكن الاعتماد في الحل على جداول الصدق، مع الأخذ في الاعتبار فقط قيم الصدق المستنتجة من الشروط المعطاة، أي حساب قيمة الصدق للتقرير المركب $(A \to \sim B) \to (\sim B \to \sim A)$ في الحالتين الآتيتين :

(١) عندما تكون قيمتي الصدق للتقريرين A ، B هما 1 ، 0 على الترتيب.

(٢) عندما تكون قيمتي الصدق للتقريرين A ، B هما 0 ، 0 على الترتيب.

وللاختصار سوف نرمز للتقرير المركب $(A \to \sim B) \to (\sim B \to \sim A)$ بالرمز α $A \to \sim B$.

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \vee B$	$\sim B \wedge A$	$A \to \sim B$	$\sim B \to \sim A$	α
1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

جدول (١٥)

يتضح لنا من قيم الصدق بالعمود الأخير بالجدول أن التقرير لا هو قانون ولا هو تناقض ،مع ملاحظة أن الشروط المعطاة استبعدت احتمالين آخرين لقيم الصدق ،حيث أخذت فقط الحالات التي تتفق مع الشرط المعطى.

مثال ١ـ٥ـ٧:

إذا عُلِمَ أن التقرير $A \Leftrightarrow \sim B$ هو قانون منطقي، أوجد قيم الصدق للتقرير المركب $(\sim A \wedge B) \Leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$.

الحل :

$\sim A$ ، $\sim B$ هي إما 1 وإما صفرا في الوقت نفسه ،إذن قيمة الصدق لكل من التقريرين A ، B هي إما 1، 0 وإما 0 ، 1 على الترتيب،على ذلك نكون جدول الصدق للتقرير المركب $\sim A \wedge B \Leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$ (والذي سنرمز له بالرمز α) كما يلي :

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \wedge \sim B$	$\sim (A \wedge \sim B)$	$\sim A \wedge B$	α
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1

جدول (١٦)

يتضح من العمود الأخير بالجدول أن التقرير يأخذ دائما قيمة الصدق 1 في الحالتين السابقتين، وعلى ذلك فهو قانون منطقي تحت الشرط المعطى رغم أنه غير ذلك عامة.

تعريف ١ــ٥ــ٣ :

يقال لتقريرين مركبين إنهما متكافئان منطقياً إذا وفقط إذا كانت قيم الصدق المتناظرة لهما متساوية .

مثال ١ـ٥ـ٨ :

بفرض أن B ، A تقريران بسيطان فإن التقريرين المركبين $A \Leftrightarrow B$ ، $(A \to B) \Leftrightarrow (B \to A)$ متكافئان منطقياً (انظر جدول (١٧)).

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \Leftrightarrow (B \to A)$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

جدول (١٧)

من قيم الصدق المتناظرة والمتساوية بالعمودين الأخير وقبل الأخير بالجدول يتضح أن التقريرين $A \Leftrightarrow B$ ، $(A \to B) \Leftrightarrow (B \to A)$ متكافئان منطقياً.

نظرية ١ــ٥ــ١:

لأي ثلاثة تقارير A، B ، C يكون :

(1) $A \vee A \Leftrightarrow A\,,\; A \Leftrightarrow A \wedge A$

قانون اللانمو (**idempotent law**)

(2) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A\;,\; A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

قانون الإبدال (**commutative law**)

(3) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C,$

$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$

قانون التجميع أو الدمج (associative law)

$$(4)\ \ (A\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C)),$$

$$.\ (A\vee(B\wedge C))\Leftrightarrow((A\vee B)\wedge(A\vee C))$$

قانون التوزيع (distributive law)

البرهان :

سوف نقوم ببرهان العلاقتين الآتيتين:

$$\text{(i)}\ \ (A\wedge(B\wedge C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\wedge C)$$

$$\text{(ii)}\ (A\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$$

ونترك الباقي كتمرين للطالب .

وللإجابة على الفقرتين السابقتين نفرض أن α ترمز للتقرير المركب $A\wedge(B\wedge C)$، و β ترمز للتقرير المركب $(A\wedge B)\wedge C$، و γ ترمز للتقرير المركب $A\wedge(B\vee C)$، و δ ترمز للتقرير المركب $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ ونكون جدول الصدق على النحو التالي:

A	B	C	$A\wedge B$	$A\wedge C$	$B\vee C$	$B\wedge C$	α	β	γ	δ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

جدول (١٨)

وبالنظر إلى العمودين الأخير وقبل الأخير بالجدول نلحظ تطابق قيم الصدق للتقريرين $A \wedge (B \vee C)$ ، $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
أي أن

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

وبفحص العمودين قبل الأخيرين من الجدول سوف يتضح لنا أن :

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

نظرية ١ــ٥ــ٢ :

(١) دالة الاقتضاء $\rightarrow$ ليست إبدالية وليست تجمعية .

(٢) دالة الفصل $\vee$ توزيعية على دالة الاقتضاء .

البرهان :

(١) دالة الاقتضاء ليست إبدالية، حيث إن التقريرين $(A \rightarrow B)$، $(B \rightarrow A)$ غير متكافئتين منطقياً وهذا يتضح من جدول الصدق الآتي:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

جدول (١٩)

كما أن دالة الاقتضاء $\rightarrow$ ليست تجميعية حيث إنه لأي ثلاثة تقارير A ، B ، C سوف يتضح لنا من جدول الصدق الآتي أن التقريرين $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ، $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ غير متكافئين منطقياً.

A	B	C	$A\to B$	$B\to C$	$A\to(B\to C)$	$(A\to B)\to C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0

جدول (٢٠)

(٢) لأي ثلاثة تقاريرA ، B ، C نعتبر أن α ترمز للتقرير المركب $A\vee(B\to C)$ ، و β ترمز للتقرير المركب $(A\vee B)\to(A\vee C)$

وعليه نكون جدول الصدق الآتي:

A	B	C	$A\vee B$	$A\vee C$	$B\to C$	α	β
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1

جدول (٢١)

الجدول السابق يبين أن $\vee$ توزيعية من ناحية اليسار $\rightarrow$ ، أي أن

$$(A \vee (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$$

وحيث إن $\vee$ إبدالية فإن :

$$(A \vee (B \rightarrow C)) \Leftrightarrow ((B \rightarrow C) \vee A) \quad \text{(i)}$$

$$((A \vee B) \rightarrow (A \vee C)) \Leftrightarrow ((B \vee A) \rightarrow (C \vee A)) \quad \text{(ii)}$$

من (i) و (ii) نحصل على الآتي:

$$((B \rightarrow C) \vee A) \Leftrightarrow ((B \vee A) \rightarrow (C \vee A))$$

أي أن $\vee$ توزيعية من ناحية اليمين على دالـــة الاقتضاء $\rightarrow$ وعلى ذلك فـــإن $\vee$ توزيعية على $\rightarrow$.

نظرية ١ــ٥ــ٣ :

بفرض أن A ، B تقريران ، إذن:

$$\text{(i)} \quad \sim (A \vee B) \Leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$$

$$\text{(ii)} \quad \sim (A \wedge B) \Leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$$

البرهان :

نفرض أن α ترمز للتقرير المركب $\sim (A \vee B)$، و β ترمز للتقريـــر المركب $\sim A \wedge \sim B$ ، و γ ترمز للتقرير المركب $\sim (A \wedge B)$،و δ ترمز للتقرير $\sim A \vee \sim B$ وعليه نكون جدول الصدق الآتي :

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	α	β	γ	δ
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

جدول (٢٢)

نلحظ من الجدول السابق، ومن خلال تطابق قيم الصدق المتناظرة بـــالعمودين الأخيرين أن

$$\sim(A\vee B)\Leftrightarrow(\sim A\wedge\sim B)$$

كما نلحظ من تطابق قيم الصدق المتناظرة بالعمودين قبل الأخيرين أن

$$\sim(A\wedge B)\Leftrightarrow(\sim A\vee\sim B)$$

١-٦ الدلالات والرموز :

يتضح لنا مما سبق أن تقريرا ما قد يتحقق في كل الحـــالات، وقـــد لا يتحقق في بعض أو كل الحالات . لذلك لو اعتبرنا أن P تقرير مـــا ،وأن X مجموعة غير خالية، فقد اتفق من أجل الاختصـــار في الكـــلام أن نعـــبر عـــن الحالات الآتية رمزيا كما يلي :

" لأي عنصر $x\in X$ التقرير P محقق " بالرمز $\forall x:\mathrm{P}(x)$.

"يتحقق التقرير P من أجل عنصر واحد على الأقل" بالرمز $\exists x:\mathrm{P}(x)$.

" يوجد عنصر واحد على الأقل لا يحقق التقرير P" بالرمز $\exists x:\sim\mathrm{P}(x)$.

" لأي عنصر $x\in X$ التقرير P غير محقق" بالرمز $\forall x:\sim\mathrm{P}(x)$.

ويجب ملاحظة أن:

$$\forall x:\mathrm{P}(x)\rightarrow\exists x:\mathrm{P}(x)$$
$$\sim(\forall x:\mathrm{P}(x))\Leftrightarrow\exists x:\sim\mathrm{P}(x)$$
$$\sim(\exists x:\mathrm{P}(x))\Leftrightarrow\forall x:\sim\mathrm{P}(x)$$

الرمز $\forall$ يعنى لكل أو لأي، والرمز $\exists$ يعنى يوجد، والرمز : يعنى بحيث.

تمارين (١)

(١) حدد التقارير من بين العبارات الآتية ثم أوجد قيمة الصدق لكل تقرير.

(أ) ما أجمل التفوق . (ب) ١٢ عدد زوجي .

(جـ) $X^2 < 0$ حيث X عدد حقيقي .

(٢) أوجد قيمة الصدق لكل تقرير من التقارير المركبة الآتية :

(a) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (\sim A \vee \sim B)$

(b) $(A \vee B) \wedge (C \rightarrow \sim (A \wedge B))$

(c) $(\sim A \wedge B) \vee (A \vee B)$

(d) $(A \Leftrightarrow \sim B) \vee (B \rightarrow A)$

(e) $(A \vee \sim B) \rightarrow (A \wedge B)$

(f) $\sim (A \vee B) \rightarrow (B \Leftrightarrow C)$

(٣) ادرس التقارير المركبة الآتية :

(a) $\sim (A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (\sim A \vee (\sim B \wedge \sim C))$

(b) $A \Leftrightarrow (A \wedge \sim A)$

(c) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

(d) $A \vee B \Leftrightarrow (\sim (\sim A \wedge \sim B))$

(e) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (A \wedge \sim B)$

(٤) إذا كانت قيمة الصدق للتقرير المركب $(A \vee B) \rightarrow (B \vee C)$ تساوي صفراً، أوجد قيمة الصدق للتقارير الآتية :

(a) $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \wedge B)$

(b) $(A \Leftrightarrow (A \rightarrow C)) \vee (A \rightarrow B)$

(c) $(A \vee B \vee C) \Leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)]$

(٥) إذا علم أن التقرير $A \Leftrightarrow B$ تناقض منطقي، فأوجد قيمة (قيم) الصدق للتقرير المركب الآتي :

$$\sim(A \wedge \sim B) \rightarrow (A \vee \sim B)$$

(٦) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير A تساوي 0 وقيمة الصدق للتقرير المركب $B \Leftrightarrow (A \vee C \sim)$ تساوي 1 ، فادرس التقرير المركب الآتي:

$$[(A \rightarrow C) \Leftrightarrow A \wedge B] \Leftrightarrow ((\sim A \rightarrow C) \vee B)$$

(٧) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير المركب $A \rightarrow (B \vee A)$ تساوي صفراً.

أوجد قيم الصدق للتقرير المركب الآتي:

$$(A \rightarrow \sim B) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \wedge B)$$

(٨) إذا علم أن قيمة الصدق للتقرير $A \Leftrightarrow (B \vee C)$ تساوي 1،وقيمة الصدق للتقرير $A \rightarrow B$ يساوي صفراً، ادرس التقرير المركب الآتي :

$$[(A \wedge \sim C) \rightarrow \sim B] \Leftrightarrow (A \vee \sim B)$$

(٩) من خلال بناء جداول الصدق المناسبة، أجب عن الأسئلة الآتية :

(أ) هل دالة الاقتضاء $\rightarrow$ توزيعية على دالة الفصل $\vee$ ؟

(ب) هل دالة الاقتضاء $\rightarrow$ توزيعية على دالة الوصل $\wedge$؟

(جـ) هل دالة الوصل $\wedge$ توزيعية على دالة الاقتضاء $\rightarrow$؟