المحددات والمصفوفات

DETERMINANTS & MATRICES

أولاً : المحددات

تعريف المحدد :

يسمى التعبير المختصر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ المكون من صفين وعمودين بمحدد من الرتبة الثانية والكميات a_{22} ، a_{21} ، a_{12} ، a_{11} عناصر المحدد .

ويعرف مفكوك المحدد من الرتبة الثانية كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال (١) : مفكوك المحدد Δ التالي يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (1)\times(5)-(4)\times(-3) = 5+12 = 17$$

بالمثل يسمى التعبير المختصر
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

المكـــون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة بمحدد من الرتبة الثالثة وتسمى الكميات

$a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\dots,\ a_{33}$ بعناصر المحدد .

بصـــورة عامة المحدد من الرتبة r يتكون من r من الصفوف و r من الأعمدة وعدد العناصر فيه تساوي $(r\times r)$

ويكون مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

حيــث A_{11} , A_{12} , A_{13} هــي المحددات الصغرى المناظرة للعناصر a_{11} , a_{12} , a_{13} علــى الترتيــب ويكون A_{11} على سبيل المثال هو المحــدد من الرتبة الثانية الناتج من حذف الصف والعمود الموجود فيه العنصــر a_{11} مــن المحدد الأصلي (أي بحذف الصف الأول والعمود الأول) نحصل علي :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل يكون A_{12} , A_{13} هي المحددات من الرتبة الثانية التالية :

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال (٢) : أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7(2\times3-2\times6) - 9(5\times3-2\times4) + 4(5\times6-2\times4)$$

$$= 7(-6) - 9(7) + 4(22) = -17$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 9 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 3x \end{vmatrix}$$

الحل :

بإيجاد مفكوك المحددين في طرفي المعادلة :

$$2x(x+3) - 45 = 5(3x) - 52$$

$$2x^2 + 6x - 45 = 15x - 52$$

$$2x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$(2x-7)(x-1) = 0$$

$$x = 3.5 \quad , \quad x = 1$$

ملاحظة

يمكن إيجاد مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة باستخدام عناصر أي صـــف أو أي عمود مع المحددات الصغرى المرافقة له ومراعاة قاعدة الإشارات التالية :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال (٤) : أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر الصف الثاني .

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2[(1)(-1)-(-1)(2)] + 2[(1)(-1)-(-1)(5)] - 1[(1)(2)-(1)(5)]$$

$$= -2(1) + 2(4) - 1(-3)$$

$$= -2 + 8 + 3 = 9$$

مثال (٥) : أوجد قيمة

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بفك المحدد بعناصر الصف الثاني ثم بعناصر العمود الثاني وتحقق من أن القيمتين متساويتين .

الحل :

(1) إشارات عناصر الصف الثاني هي − , + , − وعليه يكون قيمة المحدد بفكه من عناصر الصف الثاني كما يلي :

$$\Delta = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(2\times1 - 3\times1) + 1(1\times1 - 3\times2) - 2(1\times1 - 2\times2)$$

$$= 1 - 5 + 6 = 2$$

(2) إشـــارات عناصر العمود الثاني هي − , + , − وعليه يكون قيمة المحدد بفكه من عناصر العمود الثاني كما يلي :

$$\Delta=-2\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-2(1\times1-2\times2)+1(1\times1-2\times3)-1(1\times2-3\times1)=$$

$$=6-5+1=2$$

وواضح أن قيمة المحدد واحدة في الحالتين .

فيما سبق عرفنا المحدد من الرتبة الثانية والمحدد من الرتبة الثالثة ويمكن بنفس الطريقة تعريف محددات ذات رتبة أعلى كالرابعة والخامسة وهكذا . فمثلا يمكن تعريف محدد الرتبة الرابعة بدلالة محددات الرتبة الثالثة ومحددات الرتبة الخامسة بدلالة محددات الرتبة الرابعة وهكذا في جميع الحالات يجب أن تراعى قاعدة الإشارات .

بصورة عامة يمكن إيجاد مفكوك أي محدد من أي رتبة وذلك باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود مع المحددات الصغرى المناظرة له ومراعاة قاعدة الإشارات التالية حيث تكون الإشارة المناظرة للعنصر a_{ij} هي $(-1)^{i+j}$ فمثلا إشارة a_{23} هي $-=(-1)^{2+3}$ كما أن إشارة a_{22} هي $+=(-1)^{2+2}$ وهذه القاعدة لا تستخدم إلا عند إيجاد قيمة المحدد .

تمارين

(١) فك المحددات التالية :

1) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$

(٢) أوجد قيمة كل من المحددات التالية :

1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 25 & 11 \\ 7 & 32 & 21 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & 7 & -3 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$

(٣) أثبت ما يلي :

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18$

(٤) بدون فك المحددتين أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

(٥) حل المعادلة :

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(٦) أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

(٧) استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات الآتية :

$$(i)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad (ii)\quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$
(iii)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}
$$

ثانياً : المصفوفات

تعـــريف المصـــفوفة : أي تنظـــيم من الأعداد على شكل m من الصـــفوف و n من الأعمدة يسمى مصفوفة من الرتبة $m\times n$ وتسمى الأعداد المكونة للمصفوفة عناصر المصفوفة .

علـــى ســـبيل المثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ لها صفين وثلاثة أعمدة فهي مصفوفة من الرتبة 2×3 .

والمصـــفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ لهـــا ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الرتبة 3×2 .

بعض المصفوفات الخاصة

(١) المصفوفة المربعة

وفيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة أي أن $m=n$.

على سبيل المثال المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 .

(٢) مصفوفة الصف

وتحتوي على صف واحد $m=1$

على سبيل المثال : $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة 1×4 .

(٣) مصفوفة العمود

وتحتوي على عمود واحد $n=1$.

على سبيل المثال : $D=\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود من الرتبة 3×1 .

ملاحظات

(١) المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد وسيلة للتخزين والتعامل مع مجموعة من الأعداد .

(٢) المصـــفوفة التــي جميع عناصرها تساوي صفراً تسمى المصفوفة الصفرية .

(٣) يرمز لكل عنصر من عناصر المصفوفة بالرمز a_{ij} حيث i هو رقم الصف الذي يقع فيه العنصر ، j هو رقم العمود الذي يقع فيه العنصر .

فعلى سبيل المثال : بفرض أن : $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

فـــإن $a_{11}=2$, $a_{23}=0$ وهكذا . وعلى ذلك تأخذ المصفوفة A ذات عدد الصفوف m وعدد الأعمدة n الشكل التالي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(٤) الخـــط القطري في المصفوفة المربعة A من الرتبة $n\times n$ المكون من العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ يسمى قطر المصفوفة .

وتســمى المصــفوفة المربعة التي فيها كل عنصر من عناصر القطر لا يساوي صفراً بينما بقية العناصر تساوي الصفر بالمصفوفة القطرية .

(٥) تســمى المصــفوفة المربعة من الرتبة $n\times n$ التي عناصر قطرها يساوي كل منها 1 وبقية العناصر تساوي صفراً بمصفوفة الوحدة I_n .

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

جبر المصفوفات

(١) تساوي المصفوفات

تتســاوى المصفوفتان A , B إذا كانتا من نفس الرتبة وكان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

مثال (١) : إذا كان $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ x & y \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل من x , y .

الحل :

من تساوي المصفوفات فإن $x = 0 \ , \ y = -7$.

(٢) جمع المصفوفات

لتكن A,B مصفوفتان من نفس الرتبة $m \times n$ (أي أن لهما نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة) فإن حاصل جمعمها $A+B$ هــو مصفوفة C من نفس الرتبة وكل عنصر من المصفوفة C ينتج من

مجمـــوع نظيريه في المصفوفتين B , A وعلى ذلك فإن حاصل جمع A و B يعرف كما يلي :

إذا كانت A , B هما المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال (٢) : أوجد حاصل جمع المصفوفتين :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+7 & 4-1 & -6+4 \\ 0+2 & -1+1 & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : يمكن جمع أي عدد من المصفوفات من نفس الرتبة .

(٣) ضرب المصفوفة في عدد حقيقي k

حاصل ضرب عدد حقيقي k في مصفوفة من الرتبة $m\times n$ هو مصفوفة من نفس الرتبة وعناصرها هي عناصر المصفوفة الأصلية وكل منها مضروب في العدد الحقيقي k .

وعلى ذلك إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m\times n$ كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ - & - & ---- & - \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن kA هو :

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لا تتأثر رتبة المصفوفة عند ضربها بعدد ثابت ، فالمصفوفة kA من الرتبة $m \times n$ أيضا .

مثال (٣) : $7\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 & -7 & 21 \\ 14 & 35 & -42 \end{bmatrix}$

(٤) طرح المصفوفات

حاصل طرح المصفوفتان A,B اللتان لهما نفس الرتبة يعرف كما يلي :

$$A-B=A+(-1)B$$

مثال (٤) : أوجد $A-B$ إذا كان : $A=\begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

الحل :

$$A-B=\begin{bmatrix}17 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}18 & -1\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

ملاحظة : عند طرح مصفوفة من مصفوفة أخرى لها نفس الرتبة فإنه يتم طرح كل عنصر من العنصر المناظر له .

مثال (٥) : إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 7 & -5 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-8 & 12 & 4\\ 7 & 3 & -1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & -15 & 10\\ 0 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة D حيث $D=2A-B+\frac{1}{5}C$

الحل :

$$D=2\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 7 & -5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-8 & 12 & 4\\ 7 & 3 & -1\end{bmatrix}+\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & -15 & 10\\ 0 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 14 & -10 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 8 & -12 & -4 \\ -7 & -3 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 11 & -9 & -6 \\ 7 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال (٦) : إذا كانت : $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة X بحيث $4(B-X)=X+B+2A-C$

الحل :

$$4(B-X)=X+B+2A-C$$

$$4B-4X=X+B+2A-C$$

$$5X=3B-2A+C$$

$$5X=3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(٥) ضرب المصفوفات

تعـــريف : إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ و B هي مصفوفة مـــن الرتبة $n\times L$ (أي أن عدد الأعمدة في A يساوي عدد الصفوف في B) فإنهما تقبلان الضرب في بعضهما ويكون حاصل الضرب مصفوفة $C=AB$ (بالترتيـــب مـــن اليسار إلى اليمين) من الرتبة $m\times L$ ويكون العنصر c_{ij} في المصفوفة C الموجود في الصف رقم i والعمود رقم j يســـاوي مجمـــوع حاصــــل ضـــرب كـــل عنصر في الصف رقم i في المصـــفوفة A فـــي العنصــــر المقابل في العمود رقم j في المصفوفة B وهكذا .

مثال (٧) : أوجد حاصل الضرب AB للمصفوفتين A و B إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

الحل :

عدد أعمدة A = عدد صفوف B = 2

إذن يمكن إيجاد AB ويكون

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\therefore \ AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ونلاحظ أن المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب $C=AB$ عدد صفوفها يساوي عدد صفوف المصفوفة A وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة المصفوفة B .

مثال (٨) : إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

أوجد حاصل الضرب AB .

الحل :

$$AB=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix} 7\times 3+3\times(-1)+4\times 2 & 7\times 5+3\times 1+4\times 3 \\ (-1)\times 3+5\times(-1)+2\times 2 & (-1)\times 5+5\times 1+2\times 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 26 & 50 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ملاحظة : من تعريف الضرب السابق نجد أنه إذا تحقق شرط الضرب في ترتيب الضرب AB فقد لا يتحقق في الترتيب BA أي أن :

$$AB\neq BA$$

مثال (٩) : إذا كان : $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 6 & -4 & 3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

أوجد AB وأبحث إيجاد BA .

الحل :

أولاً : حاصل الضرب AB ممكن

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 6 & -4 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+18 & 5-12 & 7+9\\ -5+24 & 25-16 & 35+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}17 & -7 & 16\\ 19 & 9 & 47\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ثانياً : حاصل الضرب BA غير ممكن حيث أن عدد أعمدة B يساوي 3 بينما عدد صفوف A يساوي 2 .

مثال (١٠) : إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

أوجد AB وأبحث إيجاد BA .

الحل :

أولاً : حاصل الضرب AB ممكن

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3+0 & -2-5-8\\ 0-9+0 & 0+15-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -15\\ -9 & -1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ثانيا : حاصل الضرب BA أيضا ممكن

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+0 & -1-6 & 2-8 \\ -3+0 & 3+15 & -6+20 \\ 0+0 & 0-12 & 0-16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -7 & -6 \\ -3 & 18 & 14 \\ 0 & -12 & -16 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

لاحظ أن $AB \neq BA$

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي على الصورة

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

تسمى بالمصفوفة القطرية وفي الحالة الخاصة إذا كانت $\alpha_i = 1$, $i=1,2,3,\ldots,n$ فإن المصفوفة تسمى **بمصفوفة الوحدة** ويرمز لها عادةً بالرمز I_n أي :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

(١) حاصـــل ضـــرب مصفوفة الوحدة في أي مصفوفة من نفس الرتبة يساوي نفس المصفوفة .

فعلى سبيل المثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(٢) يرتبط بالمصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ---- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ---- & a_{2n} \\ - & - & ---- & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ---- & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويجب ألا نخلط بين هذين المفهومين فالمصفوفة عبارة عن مجموعة مرتبة من الأعداد مكتوبة في صورة جدول (مستطيل) ومحددها $det\ A$ هو عدد يتحدد وفقاً لقواعد المحددات .

(٣) المصفوفة المربعة تسمى مصفوفة غير مفردة إذا كان محددها لا يساوي الصفر .

وبالعكس إذا كان محدد المصفوفة يساوي الصفر فإنها تسمى مصفوفة مفردة أو مصفوفة شاذة .

على سبيل المثال المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تكون غير مفردة حيث $det\ A=23$. بينما المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ تكون مفردة حيث $det\ B=0$.

تمارين

(١) أحسب $AB-BA$ إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{bmatrix}$$

(٢) أوجد $f(A)=A^2-5A+3I$ حيث $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}$

(٣) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1&-3\\0&5\\2&0\\-1&2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2&5\\0&-7\\-1&2\\0&4\end{bmatrix} \quad ,$$

$$C=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-2&0\end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}-2&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي :

(أ) $A+B$ (ب) $C+D$ (ج) $A-B$

(د) $\left(A^T\right)^T$ (هـ) $2A-4B$ (و) $(C-D)^T$

(٤) أثبت أن $(A+B)^T = A^T + B^T$

(٥) إذا كان $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد AB

(٦) أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات التالية :

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$