هندسة تحليلية
الفرقة الأولى شعب
أساسي رياضيات ووعلوم وعربي ومواد

الخط المستقيم

نقطة تقاطع مستقيمين وشروط تلاقي ثلاثة مستقيمات:

a) إذا كان المستقيمان

$$*\quad \left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

متقاطعان فإن نقطة تقاطعهما (باستخدام المحددات أو بالحذف) تعطى بالعلاقات

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

الخط المستقيم

١-شرط توازي مستقيمين:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ أو } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

٢- شرط تعامد مستقيمين:

شرط تعامد المستقيمين * يكون $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

الخط المستقيم

مثال (١):

المستقيمان
$$\left.\begin{aligned} 2x - 7y + 12 &= 0 \\ x - \frac{7}{2}y + 10 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

متوازيان لأن
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix} = 0$$

الخط المستقيم

شروط تلاقي ثلاثة مستقيمات في نقطة:

شرط تلاقي المستقيمات الثلاثة

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_4 = 0 \end{array}\right\}$$

الخط المستقيم

في نقطة هو

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

الخط المستقيم

<u>الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع خطين مستقيمين معلومين:</u>

نفرض أن لدينا مستقيمين معلومين معطيين بالمعادلتين:

$$\left.\begin{aligned}\Phi1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0\\ \Phi2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0\end{aligned}\right\} \quad **$$

نفرض أن إحدى نقط تقاطع المستقيمين $\Phi2,\Phi1$ هي (α, β) فيكون

$$\left.\begin{aligned}\Phi1(\alpha,\beta) = 0\\ \Phi2(\alpha,\beta) = 0\end{aligned}\right\} \quad ***$$

الآن اعتبر المستقيمة (معادلات خطية في y, x) الممثل بالمعادلة:

الخط المستقيم

باستخدام ** فإن قيمة هذا المقدار الأخير هي الصفر. أي أن النقطة (α, β) تقع على المستقيم الممثل بالمعادلة ***.

إذن معادلة أي مستقيم ما بنقطة تقاطع المستقيمين * سيكون

$$\Phi(x, y) + \lambda\Psi(x, y) = 0$$

لجميع قيم λ. الثابت λ يمكن تعيينه في أي حالة خاصو وذلك باعتبار البيانات المعطاة في المسألة.

الخط المستقيم

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين $2x-y=6, x+y=5$ ويحتوي النقطة $(6,8)$.

الحل

معادلة أي خط مستقيم مار بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين هي:

$$x+y-5+\lambda(2x-y-6)=0$$

وحيث أن الخط المطلوب يمر بالنقطة $(6,8)$ إذن فهي تحققه، أي أن:

$$6+8-5+\lambda(12-8-6)=0 \rightarrow$$

الخط المستقيم

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين:

a) $5x+2y-2=0,\ 2x+3y+4=0$ وعمودي على المستقيم $x-y=0$.

b) $25x+41y-8=0,\ 5x+7y+9=0$ ويوازي المستقيم $2x+3y+7=0$.

الحل

a) معادلة أي خط مستقيم مار بنقطة تقاطع المستقيمين المعلومين هي:

$$2x+3y+4+\lambda(5x+2y-2)=0$$

أو

$$(2+5\lambda)x+(3+2\lambda)y+(4-2\lambda)=0$$

شرط تعامد هذا المستقيم مع المستقيم $x-y=0$ هو

الخط المستقيم

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Rightarrow 1 \times (1 + 5\lambda) + (-1)(3 + 2\lambda) = 0$$

$$2 + 5\lambda - 3 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هي

$$\left(2 + \frac{5}{3}\right)x + \left(3 + \frac{2}{3}\right)y + \left(4 - \frac{2}{3}\right) = 0$$

أو

$$11x + 11y + 10 = 0$$

الخط المستقيم

b) معادلة أي خط مستقيم مار بنقطة تقاطع المستقيمين المعطيين هي:

$$25x + 41y - 8 + \lambda(5x + 7y + 9) = 0$$

أو

$$(25 + 5\lambda)x + (41 + 7\lambda)y + (-8 + 9\lambda) = 0$$

شرط توازي هذا الخط المستقيم مع المستقيم

$$2x + 3y + 7 = 0$$

هو

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$\frac{2}{25 + 5\lambda} = \frac{3}{41 + 7\lambda}$$

الخط المستقيم

$\Rightarrow \qquad 82 + 14\lambda = 75 + 15\lambda$

$\Rightarrow \qquad \lambda = 7$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هي

$$(25 + 35)x + (41 + 49)y + (-8 + 63) = 0$$

أو

$$60x + 90y + 55 = 0$$

$$12x + 18y + 11 = 0$$

أزواج الخطوط المستقيمة

المعادلة العامة المتجانسة ذات الدرجة الثانية في متغيرين:

إن حاصل ضرب المعادلتين الصفريتين $x+3y=0, 2x-y=0$ اللتين تمثلان خطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل $(0,0)$ يعطى بالمعادلة المتجانسة $2x^2+5xy-3y^2=0$

واضح أن أي نقطة (x, y) واقعة على أي من الخطين المستقيمين تحقق هذه المعادلة المتجانسةالعملية العكسية وهي ماذا تمثل المعادلة $2x^2+5xy-3y^2=0$؟

أزواج الخطوط المستقيمة

نظرية (١):

المعادلة العامة المتجانسة ذات الدرجة الثانية في x, y

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (1)$$

دائماً تمثل خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل.

أزواج الخطوط المستقيمة

مثال (١): ماذا تمثل للعادلة $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$

الحل

نحلل المعادلة بمجر النظر إلى

$$(2x+3y)(x-y)=0$$

أو باستخدام القانون باعتبارها معادلة من الدرجة الثانية في $\frac{x}{y}$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \quad \text{أو}$$

أزواج الخطوط المستقيمة

الزاوية θ المحصورة بين المستقيمين الممثلين بالمعادلة (1)

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

أزواج الخطوط المستقيمة

شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين خطين مستقيمين:

ناقشنا فيما سبق المعادلة العامة المتجانسة ذات الدرجة الثانية في متغيرين ورأينا كيف أنها تمثل معادلة من خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل.

والآن ماذا عن المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين x, y والتي يمكن كتابتها في الصورة العامة الآتية:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \text{(I)}$$

حيث كل من a, h, b لا تساوي صفراً.

أزواج الخطوط المستقيمة

شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية (I) خطين مستقيمين ومختلفين أو منطبقين كماً ويمكن أن يكونا تخيليين، أن المحدد:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

والذي يسمى بالمحدد الكبير. وبالعكس إذا كان $\mathbf{\Delta = 0}$ فإن المعادلة (I) تمثل خطين مستقيمين. (أيضاً المحدد $\mathbf{\Delta}$ يسمى بمميز المعادلة العامة ذات الدرجة الثانية).

أزواج الخطوط المستقيمة

مثال: أوجد ما تؤول إليه المعادلة

$$Y^2 - XY - 6X^2 + 25X - 25 = 0$$

بعد نقل نقطة الأصل $(2, 1)$ مع بقاء المحاور في نفس الاتجاه.

حلل المعادلة الناتجة ثم وضع ماذا تمثل المعادلة المعطاة.

أزواج الخطوط المستقيمة

الحل

نعوض عن $x = x' + 2, y = y' + 1$ في المعادلة المعطاة ينتج أن

$$(y' + 1)^2 - (x' + 2)(y' + 1) - 6(x' + 2)^2 + 25(x' + 2) - 25 = 0$$

أو $y'^2 + 2y' + 1 - x'y' - 2y' - x' - 2 - 6x'^2 - 24x' - 24 + 25x' + 50 - 25 = 0$

أو $y'^2 - x'y' - 6x'^2 = 0$

وهذه معادلة متجانسة من الدرجة الثانية في x', y' ولذلك فهي تمثل زوج من المستقيمات يمران بنقطة الأصل الجديدة. وبتحليل هذه المعادلة ينتج أن:

أزواج الخطوط المستقيمة

$$(y' - 3x')(y' + 2x') = 0$$

أي أن معادلتي المستقيمين هما:

$$y' - 3x' = 0, \qquad y' + 2x' = 0$$

وإذا عوضنا عن $x' = x - 2, y' = y - 1$ ينتج أن معادلة المستقيمين بالنسبة للمحاور الأصلية هي:

$$y - 3x + 5 = 0, \qquad y + 2x - 5 = 0$$

أي أن المعادلة المعطاة تمثل زوج من المستقيمات متقاطعان في النقطة $(2, 1)$.

أزواج الخطوط المستقيمة

مثال: أثبت أن المعادلة $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$ تمثل خطين مستقيمين، ثم أوجد معادلتهما.

الحل

$$a = 2, h = -2, b = 2, g = 4, f = -4, c = -17$$

$\because$ الشرط اللازم لكي تمثل المعادلة المعطاة خطين مستقيمين:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix} = 0$$

متحقق.

أزواج الخطوط المستقيمة

$\therefore$ المعادلة تمثل خطين مستقيمين. لإيجاد معادلتهما نحل المعادلة المعطاة بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y (لأن كليهما من الدرجة الثانية).

نكتب المعادلة على الصورة: $y^2 - 2(x+2)y + \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right) = 0$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y نحصل على $y = x + 2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right)}$

أي أن $y = x + 2 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$

وعلى ذلك فالخطان هما:

$$y = x + 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}\ ,$$

$$y = x + 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

وهذان المستقيمان متوازيان.

تم الإنتهاء من المحاضرة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته