Geometry in 2D هندسة تحليلية
الفرقة الأولى أساسي رياضيات إنجليزي
The First Year Primary English Mathematics

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

The two-degree homogeneous general equation in two variables

المعادلة العامة المتجانسة ذات الدرجة الثانية فى متغيرين:

The product of the zero equations x + 3y = 0, 2x-y = 0 which represent two straight lines passing through the origin point (0, 0) is given by the homogeneous equation $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$. It is clear that any point (x, y) located on either of the two straight lines achieves this homogeneous equation, the inverse process, which is what is the equation $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$?

إن حاصل ضرب المعادلتين الصفريتين $x + 3y = 0, 2x - y = 0$ اللتين تمثلان خطين مستقيمين مارين بنقطة الأصل (0, 0) يعطى بالمعادلة المتجانسة $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$

واضح أن أي نقطة (x, y) واقعة على أي من الخطين المستقيمين تحقق هذه المعادلة المتجانسةالعملية العكسية وهي ماذا تمثل المعادلة $2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$؟

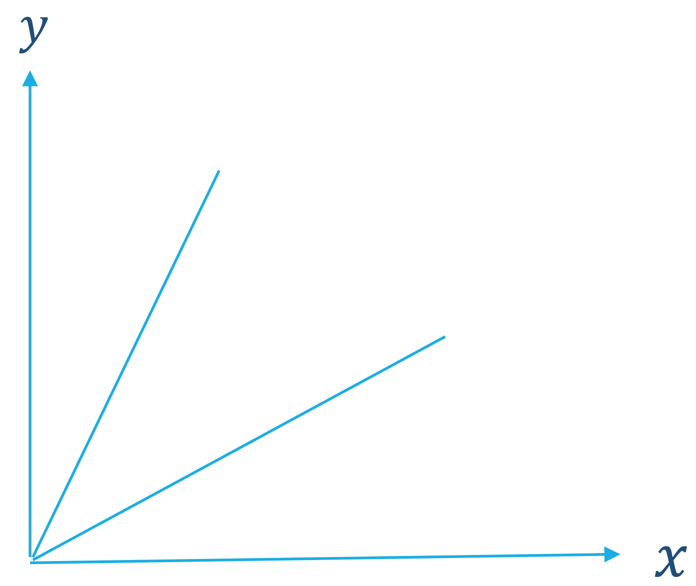
Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

Theory (1):

Two-degree homogeneous general equation in x, y

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (1)$$

It always represents two straight lines that pass through the point of origin.



نظرية (١):

المعادلة العامة المتجانسة ذات الدرجة الثانية في x, y

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (1)$$

دائماً تمثل خطين مستقيمين يمران بنقطة الأصل.

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

Example (1): What does the equation represent? $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$.

Solution:

We analyze the equation by looking at (2x + 3y) (x - y) = 0

Or using the law as a quadratic equation in $\frac{x}{y}$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال (١): ماذا تمثل المعادلة $2x^2 + xy - 3y^2 = 0$.

الحل:

نحلل المعادلة بمجرد النظر إلى (2x + 3y)(x – y) = 0

أو باستخدام القانون باعتبارها معادلة من الدرجة الثانية في $\frac{x}{y}$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = -\frac{3}{2}$$

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

The angle θ between the two lines represented by equation (1)

الزاوية θ المحصورة بين المستقيمين الممثلين بالمعادلة (1)

$$\boldsymbol{\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}}$$

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

From this result we can see that the two straight lines will be:

a) Real different if $h^2 - ab > 0$

b) Equal Real $h^2 - ab = 0$

c) Imaginary if $h^2 - ab < 0$

من هذه النتيجة يمكننا أن نرى أن المستقيمين سيكونان:

a) حقيقيين مختلفين إذا كان $h^2 - ab > 0$

b) حقيقيين منطبقين إذا كان $h^2 - ab = 0$

c) تخيليين إذا كان $h^2 - ab < 0$

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

The condition for the representation of the second degree general equation in two straight-line variables:

شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين خطين مستقيمين:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

Where *a, h, b* are not zero.

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

<u>Theory (2):</u>The condition for the representation of the general equation of the second degree (I) is two straight lines, different or equally applicable, and they can be fictitious, that the determinant: $\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$ **Which is called the big delimiter. Conversely, if Δ = 0, equation (I) represents two straight lines. (Also the determinant Δ is called the general quadratic equation).**

<u>نظرية (٢):</u>شرط تمثيل المعادلة العامة من الدرجة الثانية (I) خطين مستقيمين ومختلفين أو منطبقين كماً ويمكن أن يكونا تخيليين، أن المحدد: $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ **والذي يسمى بالمحدد الكبير. وبالعكس إذا كان 0 = Δ فإن المعادلة (I) تمثل خطين مستقيمين. (أيضاً المحدد Δ يسمى بمميز المعادلة العامة ذات الدرجة الثانية).**

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

Example: Find the equation $Y^2 - XY - 6X^2 + 25X - 25 = 0$. After moving(transfer) the origin point (2, 1), while the axes remain in the same direction. Analyze the resulting equation and then put what the given equation represents.

مثال: أوجد ما تؤول إليه المعادلة $Y^2 - XY - 6X^2 + 25X - 25 = 0$ بعد نقل نقطة الأصل (2, 1) مع بقاء المحاور في نفس الاتجاه. حلل المعادلة الناتجة ثم وضع ماذا تمثل المعادلة المعطاة.

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

The solution: *Substitute* $x = x' + 2,\ \ y = y' + 1$ *in the given equation, resulting in*

$$(y' + 1)^2 - (x' + 2)(y' + 1) - 6(x' + 2)^2 + 25(x' + 2) - 25 = 0$$

Or $$y'^2 + 2y' + 1 - x'y' - 2y' - x' - 2 - 6x'^2 - 24x' - 24 + 25x' + 50 - 25 = 0$$

Or $y'^2 - x'y' - 6x'^2 = 0$.*This is a second-degree homogeneous equation in x ', y' and therefore represents a pair of straight lines passing through the new origin point. By analyzing this equation it is produced that:*

الحل: نعوض عن $x = x' + 2, y = y' + 1$ في المعادلة المعطاة ينتج أن

$$(y' + 1)^2 - (x' + 2)(y' + 1) - 6(x' + 2)^2 + 25(x' + 2) - 25 = 0$$

أو $y'^2 + 2y' + 1 - x'y' - 2y' - x' - 2 - 6x'^2 - 24x' - 24 + 25x' + 50 - 25 = 0$ أو $y'^2 - x'y' - 6x'^2 = 0$

وهذه معادلة متجانسة من الدرجة الثانية في x', y' ولذلك فهي تمثل زوج من المستقيمات يمران بنقطة الأصل الجديدة.
وبتحليل هذه المعادلة ينتج أن:

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

$(y' - 3x')(y' + 2x') = 0$.That is, the two equations of the two lines are: $y' - 3x' = 0,\ y' + 2x' = 0$. If we substitute for $x' = x - 2,\ y' = y - 1$ it follows that the equation of the two lines for the original axes is: $y - 3x + 5 = 0,\ \ y + 2x - 5 = 0$.That is, the given equation represents a pair of straight lines crossed in point (1, 2).

أي أن معادلتي المستقيمين هما $(y' - 3x')(y' + 2x') = 0$: $y' - 3x' = 0, y' + 2x' = 0$

وإذا عوضنا عن $x' = x - 2, y' = y - 1$ ينتج أن معادلة المستقيمين بالنسبة للمحاور الأصلية هي:

$$y - 3x + 5 = 0, \qquad y + 2x - 5 = 0$$

أي أن المعادلة المعطاة تمثل زوج من المستقيمات متقاطعان في النقطة $(2, 1)$.

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

<u>Example:</u> **Prove that the equation $2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0$ represents two straight lines, and then find their equation.**

<u>The solution :</u> $a=2$, $h=-2$, $b=2$, $g=4$, $f=-4$, $c=-17$. $\because$ **the condition for the given equation to be two straight lines:** $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}=0.$ **Achieved.**

<u>مثال:</u> أثبت أن المعادلة $2x^2-4xy+2y^2+8x-8y-17=0$ تمثل خطين مستقيمين، ثم أوجد معادلتهما.

<u>الحل:</u> $a=2, h=-2, b=2, g=4, f=-4, c=-17$

$\because$ الشرط اللازم لكي تمثل المعادلة المعطاة خطين مستقيمين: $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}=0$ متحقق.

Pairs of Straight lines
أزواج الخطوط المستقيمة

$\therefore$ *The equation represents two straight lines. To find their equation, we solve the given equation with respect to x or with respect to y (because both are quadratic).*

We write the equation on the image: $y^2 - 2(x+2)y + \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right) = 0$. *By solving this equation for y we get* $y = x + 2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right)}$. *That is,* $y = x + 2 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$ *Therefore, the two lines are:* $y = x + 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = x + 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}$. *These two lines are parallel.*

$\therefore$ المعادلة تمثل خطين مستقيمين. لإيجاد معادلتهما نحل المعادلة المعطاة بالنسبة لـ x أو بالنسبة لـ y (لأن كليهما من الدرجة الثانية). نكتب المعادلة على الصورة: $y^2 - 2(x+2)y + \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right) = 0$ بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y نحصل على $y = x + 2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right)}$ أي أن $y = x + 2 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}$

وعلى ذلك فالخطان هما: $y = x + 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y = x + 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}$. وهذان المستقيمان متوازيان.

تم الإنتهاء من المحاضرة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته