المحاضرة السادسة

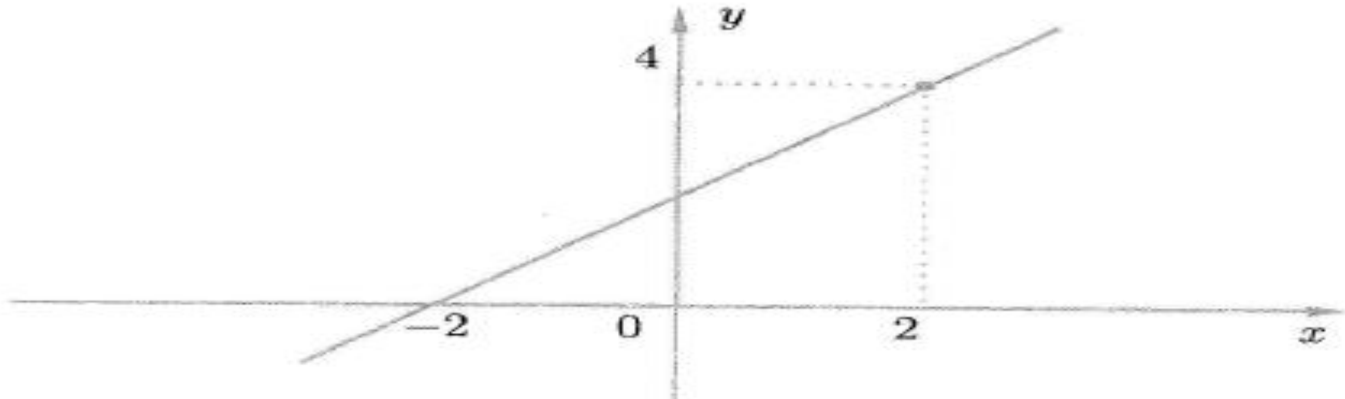
النهايات

مثـال 1

أوجد نهاية الدالة $f(x) = x + 2$ عندما تقترب x من 2.

الحـل

عند رسم الدالة $f(x) = x + 2$، نلاحظ أن $x + 2$ تقترب من 4 كلما اقترب x من 2.



الشكل 1.3

والجدول التالي يوضح ذلك:

x	1.9	1.92	1.94	1.96	1.98	2	2.02	2.04	2.06	2.08	2.1
$f(x)$	3.9	3.92	3.94	3.96	3.98	4	4.02	4.04	4.06	4.08	4.1

من ذلك، نستنتج أن نهاية الدالة f تساوي 4 عندما يقترب x من 2. ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

مثال 3

أوجد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

الحل

نلاحظ أن x^2-4 و $x-2$ يؤولان إلى الصفر، كلما اقترب x من 2. ومن ذلك يظهر أن

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}$$

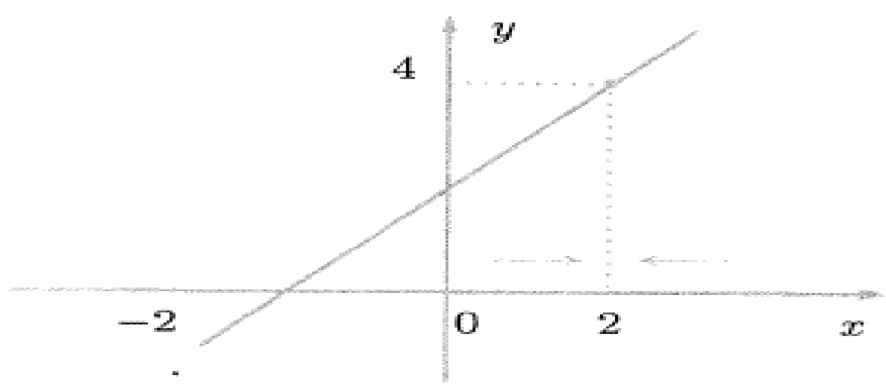
ولكن نعرف أن $\frac{0}{0}$ كمية غير معرّفة، ولهذا السبب لا بد من طريقة أخرى للحل.
يتبادر إلى الذهن أن:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

عندما $x\neq 2$، وبذلك فإن:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

لاحظ أن 2 لا يوجد في نطاق الدالة $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$
ولكن $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$.



الشكل 2.3

مثال 4

أوجد $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

الحل

عندما التعويض عن $x=1$، نجد أن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$

ولكن $\dfrac{0}{0}$ كمية غير معرّفة.

نحاول طريقة أخرى للحل.

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

إذن:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

من الأمثلة السابقة، نستطيع أن نعطي تعريفاً للنهاية.

تعريف 1.3

نقول إن العدد الحقيقي L نهاية للدالة f، عندما يؤول x إلى a، إذا كانت $f(x)$ تقترب من L، كلما اقترب x من a من الجانب الأيسر والأيمن.
ونكتب:

$$\lim_{x\to 2}f(x)==L$$

مثـــال 7

أوجد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

الحـــل

إذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليمين، نرى أن:

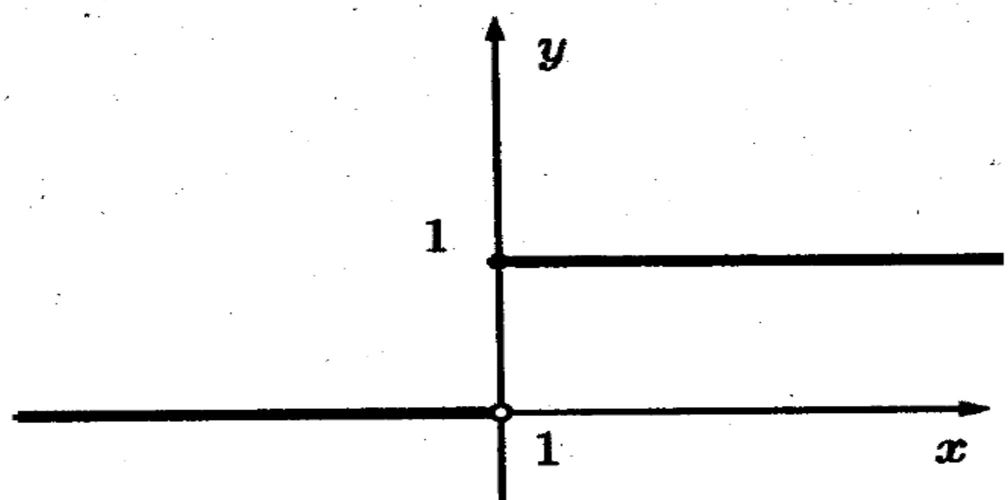
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

وإذا اقترب x إلى الصفر من جهة اليسار، نرى أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

وبالتالي، فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة.

في هذه الحالة، نقول بأن نهاية الدالة غير موجودة، عندما يقترب x إلى الصفر.



الشكل 3.3

الرمز $x \to a^+$ يعني أن قيمة x تكون أكبر من a، والرمز $x \to a^-$ يعني أن قيمة x تكون أصغر من a.

لكي تكون نهاية الدالة موجودة، فلا بد أن تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى متساويتين:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$، أوجد $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ، $\lim_{x \to 1} f(x)$.

الحل

من تعريف القيمة المطلقة، نجد أن:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & , \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

أو

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & , \quad x < 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1 & , \quad x > 1 \\ -1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

وبذلك فإن:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1$$

و

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

ومما سبق، نستنتج أن النهاية:

$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ غير موجودة.

2.3 طرق إيجاد النهايات

1) إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود على الشكل:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية، و n عدد صحيح موجب، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to b} f(x)=a_0+a_1b+a_2b^2+\ldots+a_nb^n}$$

2) إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة، وكان c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\boxed{\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)}$$

3) لنفرض أن $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجدتان، فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

أي أن نهاية جمع أو طرح دالتين تساوي جمع أو طرح نهايتيهما.

4) إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجودتين، فإن:

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

5) إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجودتين و $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$، فإن:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

بعبارة أخرى: أن نهاية خارج قسمة دالتين تساوي خارج قسمة نهايتيهما.

6) إذا تمّ التعويض المباشر وحصلنا على $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{0}{0}$ فلا بد من إجراء عمليات جبرية.

مثـــال 14

أوجد $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

الحـــل

بالتعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

إذن

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

مثـــال 15

أوجد $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

الحـــل

عند التعويض المباشر نجد أن:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}$$

إذن لا بد من عملية جبرية

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

نظرية 4

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثـــال 17

احسب $\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi}$.

الحـــل

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}$$

بما أن $\varphi \to 0$ ، فإن $2\varphi \to 0$

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = 2(1) = 2$$

إذن $\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin 2\varphi}{\varphi} = 2$

أوجد قيمة النهايات الاتية:

5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{3-x^2}{\sqrt{3}-x}$

9) $\lim\limits_{x\to 4} (2x-5)$

10) $\lim\limits_{x\to 2} |x-2|$

5) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x-3 = -1$$

6) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(x^2+x+1\right)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

نظرية 5

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi}=0$$

البرهان

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{\cos\varphi-1}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{(\cos\varphi-1)(\cos\varphi+1)}{\varphi(\cos\varphi+1)}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\mathrm{cox}^2\varphi-1}{\varphi(\cos\varphi+1)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\sin^2\varphi}{\varphi(\cos\varphi+1)}$$

$$=\lim_{\varphi\to 0}\frac{-\sin\varphi}{\varphi}.\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin}{\cos\varphi+1}$$

$$=-\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}.\frac{\lim\limits_{\varphi\to 0}\sin\varphi}{\lim\limits_{\varphi\to 0}(\cos\varphi+1)}=-1.\frac{0}{2}=0$$

اوجد النهايات الاتية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(x-3)} \quad (22 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{x^2} \quad (21$$

$$21)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{(1-\cos x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)}{x}\right)=(1).(0)$$

$$22)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(x-3)}=\lim_{x-3\to 0}\frac{x-3}{\sin(x-3)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin(y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}}$$

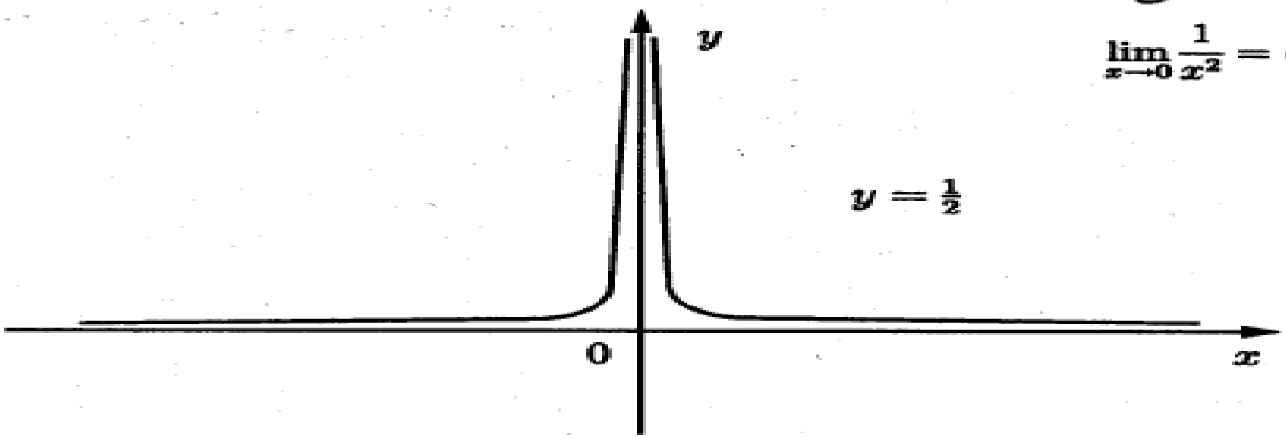
$$\frac{\lim_{y\to 0} 1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

$$when \quad y=x-3$$

3.3 مالانهاية النهاية (Infinite Limit)

عندما نحاول إيجاد نهاية الدالة $\frac{1}{x^2}$، عندما يقترب x من الصفر، نجد أن $\frac{1}{x^2}$ تكبر دون حد أعلى.

أي أن: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



الشكل 5.3

نؤكد هنا أن ∞ هي إشارة على سلوك الدالة، وليست رقماً على خط الأعداد.

تعريف 4.3

إذا كانت $f(x)$ تكبر دون حد أعلى في الاتجاه الموجب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $f(x)$ تقترب إلى ما لانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

إذا كانت $f(x)$ تصغر دون حد أدنى في الاتجاه السالب، عندما يؤول x إلى a من كلا الجانبين، فإننا نقول إن $f(x) =$ تقترب إلى سالب مالانهاية عندما يؤول x إلى a. ونكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

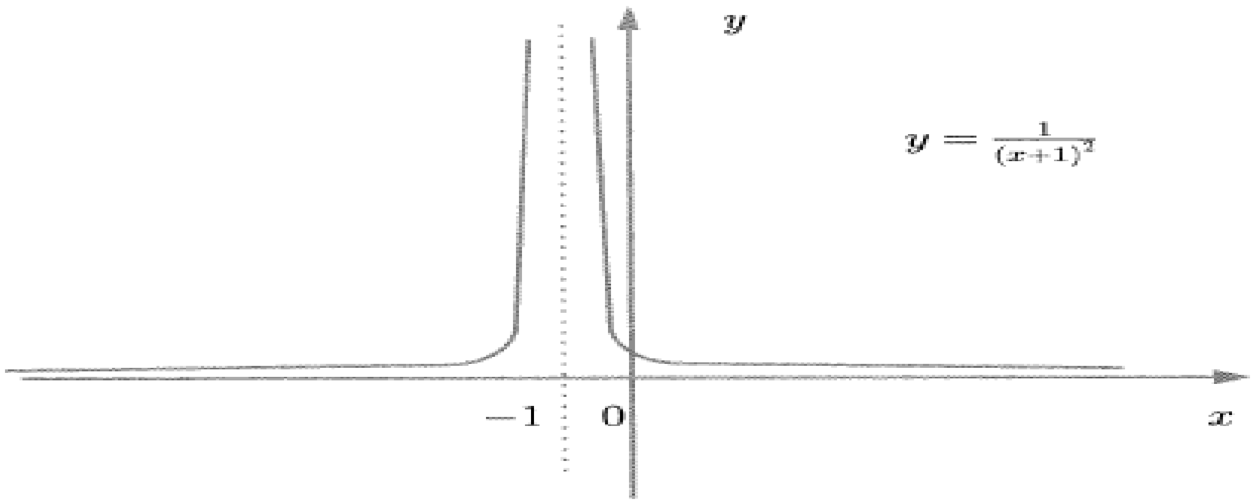
مثـــال 18

احسب $\lim\limits_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2}$.

الحــل

نلاحظ أنه عندما يؤول x إلى -1 من الجانبين، فإن $\frac{1}{(x+1)^2}$ تكبر دون حد أعلى.

إذن $\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty$



الشكل 6.3

مثـــال 19

أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ إن وجدت.

الحــل

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ و $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

إذن $\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عندما $x \to 0$ لأن:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

4.3 النهاية عند المالانهاية (Limit at Infinity)

1) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي العدد L، عندما يؤول x إلى ∞، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

2) عندما تؤول الدالة $f(x)$ إلى العدد الحقيقي L، عندما يؤول x إلى سالب مالانهاية، نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ تساوي L، عندما يؤول x إلى $-\infty$، ونكتب في هذه الحالة كالتالي: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

مثـــال 20

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$.

الحــل

نلاحظ أنه كلما كبر x، صغرت الدالة $\frac{1}{x^2}$، وبذلك فإن: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.
أنظر الشكل 5.3.

ملاحظة: في حالة الدالة القياسية، فإن إيجاد النهاية عندما $x \to \pm\infty$ يتم بقسمة البسط والمقام على أكبر أس للمتغير x يظهر في الدالة.

مثـــال 21

أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9}$

الحــل

بقسمة البسط والمقام على x^5، نجد أن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x+6}{x^5+2x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+3x+6}{x^5}}{\frac{x^5+2x^2+9}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{6}{x^5}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{9}{x^5}}$$

$$= \frac{0+0+0}{1+0+0} = 0$$

مثـــال 22

أوجد $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2}$

الحـــل

بقسمة عناصر البسط والمقام على x، ينتج :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

قاعدة

لنفرض أن : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

و $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$

إذا كانت $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$، فإن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} R(x) = \begin{cases} \pm\infty & , \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & , \quad n = m \\ 0 & , \quad n < m \end{cases}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\left(x^2 - 1\right)}{x} = \lim_{x \to 0}\left(x^2 - 1\right) = -1$$

8) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{3 - x^2}{\sqrt{3} - x} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{3 - x^2}{\sqrt{3} - x} \cdot \frac{\sqrt{3} + x}{\sqrt{3} + x} = \lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{\left(3 - x^2\right)\left(\sqrt{3} + x\right)}{3 - x^2}$$

$$\lim_{x \to \sqrt{3}}\left(\sqrt{3} + x\right) = 2\sqrt{3}$$

10) $\lim\limits_{x \to 2} |x - 2| = \lim\limits_{x \to 2^+} x - 2 = 0 = \lim\limits_{x \to 2^-} -(x - 2)$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -(x - 2) & x < 2 \end{cases}$$