المحاضرة السابعة

اتصال الدوال

تعريف 5.3 (الدالة المتصلة)

الدالة f تكون متصلة عند النقطة a إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $f(a)$ قيمة محددة، أي أن الدالة f معرّفة عند a.

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة.

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

أن أي دالة كثيرة الحدود تكون متصلة عند أي عدد حقيقي.

أي دالة قياسية تكون متصلة عند كل النقط a، والتي يكون عندها المقام $q(a)$ لا يساوي صفراً.

مثـــال 24

ناقش اتصالية الدالة: $f(x)=\dfrac{x^5+x^3-4x^2+2}{x^2-5x+6}$.

الحـــل

من الواضح أن $f(x)$ دالة قياسية. إذن $f(x)$ دالة متصلة عند كل الأعداد الحقيقية، عدا الأعداد x التي تحقق المعادلة $x^2-5x+6=0$، أي $(x-3)(x-2)=0$، وهذا يعني $x=3, x=2$.

قواعد عامة:

1) الدالة الكثيرة الحدود تكون متصلة على مجموعة كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

2) الدالة القياسية دالة متصلة عند أي نقطة في نطاقها.

3) الدوال المثلثية $(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x)$ دوال متصلة عند أي نقطة، كل في نطاقها.

4) إذا كانت f و g دالتين متصلتين عند النقطة a، وكان c عدداً ثابتاً، فإن cf و $f.g$ و $g+f$، دوال متصلة عند a.

5) إذا كانت الدالة g متصلة عند النقطة a، والدالة f متصلة عند النقطة $g(a)$، فإن الدالة $f \circ g$ متصلة عند النقطة a.

نعطي الآن بعض الأمثلة على الدوال المتصلة.

مثـــال 25

أوجد الفترة أو الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$ متصلة.

الحـــل

حيث إن f دالة قياسية. فإن f تكون متصلة عند كل نقطة في نطاقها.

$x^2 - 9 = 0$، إذا كان $x = \pm 3$.

إذن نطاق f هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $-3, 3$. ونعبّر عن ذلك بالشكل:

$$(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

إذن الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$ متصلة على $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

مثـال 26

أثبت أن الدالة $f(x) = x \sin x + 1$ دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحـل

نعلم أن الدالة $g(x) = x$ دالة متصلة عند أي عدد حقيقي، وكذلك الدالة $h(x) = \sin x$ دالة متصلة على نطاقها، وهو مجموعة كل الأعداد الحقيقية، وكذلك الدالة $\ell(x) = 1$ دالة ثابتة، وهي دالة متصلة عند أي عدد حقيقي.

$$f(x) = g(x).h(x) + \ell(x)$$

أي أن $f(x)$ هي حاصل ضرب دالتين متصلتين، مضافاً إلى ذلك دالة متصلة.
إذن $f(x)$ دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية.

ناقش اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 3x-4 & ; \quad x < 2 \\ 3x+4 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$

الحـــل

من تعريف هذه الدالة، نرى أن $f(x) = 3x - 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أصغر من 2.

لكن $3x - 4$ دالة كثيرة الحدود. إذن $3x - 4$ دالة متصلة عند أي عدد حقيقي أصغر من 2.

كذلك من التعريف نجد أن $f(x) = 3x + 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 2، وهي أيضاً دالة كثيرة الحدود.

نستطيع القول إن $f(x)$ دالة متصلة لكل عدد حقيقي أصغر من 2، وكذلك دالة متصلة عند أي عدد حقيقي أكبر من 2. والآن نبحث اتصالية الدالة عندما $x = 2$.

1) $f(2) = 10$.

2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x + 4) = 10$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 4) = 2$

وبما أن $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ ، فإن $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة.

1) $f(x)=\begin{cases} 5+x & ; \quad x\leq 3 \\ 9-x & ; \quad x>0 \end{cases}$ عند $x=3$.

لحساب اتصال الدالة عند $x=3$

1) نحسب قيمة الدالة عند $x=3$ وذلك بالتعويض عن $x=3$ كما يلى:

$f(3)=5+3=8$ ونلاحظ اننا اخذنا الفرع الذي يحتوى على $x=3$

2) نحسب النهاية عند $x=3$ وذلك بحساب $\lim_{x\to 3} 5+x=5+3=8$

3) $\because \lim_{x\to 3} 5+x=5+3=8=f(3)$

بالتالى فان الدالة متصلة عند $x=3$

(2 $f(x)=\begin{cases} -1 & ; \quad x<0 \\ 0 & ; \quad x=0 \\ 1 & ; \quad x>0 \end{cases}$ عند $x=0$.

لحساب اتصال الدالة عند $x=0$

1) نحسب قيمة الدالة عند $x=0$ وذلك بالتعويض عن $x=0$ كما يلى: $f(0)=0$ ونلاحظ اننا اخذنا الفرع الذي يحتوى على $x=0$

2) نحسب النهاية عند $x=0$ وذلك بحساب $\lim_{x\to 0} f(x)$ من تعرف الدالة المعطاة فان الدالة لها فرع على يمين الدالة وفرع اخر على يسار الدالة لذلك نحسب النهاية على اليمين $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ ناخذ القيم التى تكون اكبر من $x=0$ ثم نحسب النهاية على اليسار $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$ ناخذ القيم التى تكون أقل من $x=0$

نلاحظ أن $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ وبالتالى فان النهاية ليست موجودة

اى أن الشرط الثانى غير متحقق وبالتالى الدالة ليست متصلة

بالتالى فان الدالة ليست متصلة عند $x=0$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{|x-2|} & ; \quad x\neq 2\\ 1 & ; \quad x=2\end{cases}$ عند $x=2$.

لحساب اتصال الدالة عند $x=2$

1) نحسب قيمة الدالة عند $x=2$ فان $f(2)=1$

2) نحسب النهاية عند $x=2$ وذلك بحساب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ من تعرف الدالة المعطاة يجب تعريف المقياس

$$|x-2|=\begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ -(x-2) & x<2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-2}=1 & x>2\\ 1 & x=2\\ \dfrac{x-2}{-(x-2)}=-1 & x<2\end{cases}$$

$\therefore f(2)=1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 1=1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} -1=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

وبالتالى فان النهاية ليست موجودة اى أن الشرط الثانى غير متحقق وبالتالى الدالة ليست متصلة

بالتالى فان الدالة ليست متصلة عند $x=2$

(5 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & ; \quad x\neq 3\\ 2 & ; \quad x=3\end{cases}$ عند $x=3$.

لحساب اتصال الدالة عند$x=3$

1) نحسب قيمة الدالة عند $x=3$ فان $f(3)=2$

2) نحسب النهاية عند $x=3$ وذلك بحساب $\lim_{x\to 3} f(x)$ ناخذ الفرع الذى يحتوى على $x\neq 3$ ونلاحظ اننا لن نستخدم النهاية من الطرفين فسوف نحسب النهاية من دالة واحدة من تعرف الدالة المعطاة يجب تعريف المقياس

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\to\frac{0}{0}$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} x+3=6$$

وبالتالى فان الدالة ليست متصلة لان $\lim_{x\to 3} f(x)\neq f(3)$

بالتالى فان الدالة ليست متصلة عند $x=3$

7) حدد الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ متصلة.

لحساب اتصال الدالة عندما لا يعطى اي دالة ناتى بمجال الدالة المعطاة بما ان الدالة كسرية مجال تعريفها $R-\{1\}$

بالتالى فان الدالة متصلة على مجال تعريفها

18) أوضح الفترات التي تكون عليها الدالة $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ متصلة.

لحساب اتصال الدالة نأتى بمجال الدالة المعطاة:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -(x-2) & x<2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} \frac{x-2}{x-2}=1 & x>2 \\ \frac{x-2}{-(x-2)}=-1 & x<2 \end{cases}$$

بما ان الدالة كسرية مجال تعريفها $R-\{2\}$

بالتالى فان الدالة متصلة على مجال تعريفها