المحاضرة الثامنة

تفاضل الدوال أو الاشتقاق

تعريف 1.4

لنفرض أن الدالة f معرّفة على فترة مفتوحة تحتوي على x.

المشتقة الأولى f' عند x وتكتب $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط وجود النهاية.

إذا وجدت المشتقة الأولى $f'(x)$، فإننا نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند x (Differentiable at x)، أو لها مشتقة أولى عند x.

طريقة الخطوات الأربع لإيجاد المشتقة الأولى (من التعريف):

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x، استخدم طريقة الخطوات الأربع التالية:

1) أوجد $f(x+\Delta x)$.

2) أوجد $f(x+\Delta x)-f(x)$.

3) أوجد خارج قسمة الفرق

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ أوجد

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^2 + 1$.

الحـــل

(1 $$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 1 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1$$

(2 $$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 12x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

(3 $$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(2x - \Delta x)}{\Delta x} = 2x - \Delta x$$

(4 $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x - \Delta x) - 2x \quad .$$

إذن $f'(x) = 2x$.

2.4 بعض القوانين لإيجاد المشتقة الأولى

1) إذا كانت f دالة ثابتة $f(x)=k$ ؛ حيث أن k مقدار ثابت، فإن $f'(x)=0$.

2) إذا كانت $f(x)=x^n$، حيث n عدد صحيح موجب، فإن:

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

3) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق، فإن الدالة kf تكون قابلة للاشتقاق أيضاً، حيث أن k مقدار ثابت، و $\frac{d}{dx}kf=k\frac{df}{dx}$.

4) إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضاً و $\frac{d}{dx}(f+g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$.

---

5) $$\frac{d}{dx}(f-g)(x)=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

1) قانون الضرب

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن الدالة $f.g$ تكون قابلة للاشتقاق

و

$$\frac{d}{dx}(f.g)(x)=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

2) قانون القسمة:

إذا كانت f وg دالتين قابلتين للاشتقاق عند x، وكان $g(x) \neq 0$، فإن الدالة $\frac{f}{g}$ تكون قابلة للاشتقاق عند x، وتكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

مثــال 10

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

الحــل

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x-1)\dfrac{d}{dx}x - x\dfrac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

أوجد $h'(t)$ إذا كانت $h(t) = (t^2 + 2)(t^3 - 5)$.

الحــل

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}h(t) &= \frac{d}{dt}((t^2+2)(t^3-5)) \\
&= (t^2+2)\frac{d}{dt}(t^3-5) + (t^3-5)\frac{d}{dt}(t^2+2) \\
&= (t^2+2)(3t^2) + (t^3-5)(2t) \\
&= 3t^4 + 6t^2 + 2t^4 - 10t \\
&= 5t^4 + 6t^2 - 10t
\end{aligned}
$$

أوجد المشتقة الأولى في كل حالة من الحالات التالية:

(1 $f(x) = x(x^2+1)$

(2 $f(x) = (1+x+x^5)(2-x-x^6)$

- 1) $\frac{df(x)}{dx} = x\frac{d(x^2+1)}{dx} + (x^2+1)\frac{dx}{dx} = x(2x) + (x^2+1)$

- 2) $\frac{df(x)}{dx} = (1+x+x^5)\frac{d(2-x-x^6)}{dx} + (2-x-x^6)\frac{d(1+x+x^5)}{dx} = (1+x+x^5)(-1-6x^5) + (2-x-x^6)(5x^4+1)$

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x} \qquad (4 \qquad\qquad f(x) = \frac{2 - x - x + x^6}{1 + x + x^5} \qquad (3$$

- 3) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{(1+x+x^5)\frac{d}{dx}(2-x-x^4+x^6)-(2-x-x^4+x^6)\frac{d}{dx}(1+x+x^5)}{(1+x+x^5)^2}$
- $=\frac{(1+x+x^5)(-1-4x^3+6x^5)-(2-x-x^4+x^6)(1+5x^4)}{(1+x+x^5)^2}$

- 4) $\frac{df(x)}{dx} = \frac{(x^3+3x)\frac{d}{dx}(1)-(1)\frac{d}{dx}(x^3+3x)}{(x^3+3x)^2}$
- $=\frac{(x^3+3x)(0)-(1)(3x^2+3)}{(x^3+3x)^2}$

قاعدة السلسلة (Chain Rule)

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق، وكان $u = g(x)$، فإن الدالة التركيبية $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ تكون قابلة للاشتقاق ويكون:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال 12

أوجد y' إذا كانت $y = \frac{1}{(x^3+1)^5}$.

الحل

لنفرض أن $u = x^3 + 1$ ، إذن $y = \frac{1}{u^5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^5}\right) \cdot \frac{d}{dx}(x^3+1)$$

$$= -\frac{5}{u^6} .3x^2 = \frac{-5}{(x^3+1)^6} .3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3+1)^6}$$

مثـــال 15

إذا كان $s=(t^3+2t+3)^{\frac{11}{9}}$، أوجد $\frac{ds}{dt}$.

الحـــل

نفترض أن $u=t^3+2t+3$، ومن ذلك نجد أن $s=u^{\frac{11}{9}}$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{11}{9}u^{\frac{11}{9}-1}.(3t^2+2)\\ &= \frac{11}{9}(3t^2+2)(t^3+2t+3)^{\frac{2}{9}}\end{aligned}$$

6.4 المشتقة الأولى للدوال المثلثية

The First Derivative of Trigonometric Functions

إذا كان $y = \sin\ u$، فإن:

$$\frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

(4) إذا كان $y = \cos u$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x \tag{8}$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \sin\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$.

الحـــل

نفترض أن $u = \frac{x+1}{x^2-3}$، ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x^2-3)-2x(x+1)}{(x^2-3)^2} = \frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

إذن

$$\frac{du}{dx}\cos u\frac{du}{dx} = \cos u.\frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)\frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}\cos\left(\frac{x+1}{x^2-3}\right)$$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \cos\sqrt{x}$.

الحـــل

نفترض أن $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ومن ذلك نجد أن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = -\sin u.\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\sin\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sin\sqrt{x} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية :

3) $y = \mathbf{sin}\ (x^2 - 2x + 6)$

4) $y = \mathbf{sin}^2 x + \mathbf{cos}^2 x$

- ٣) نفرض $u = x^2 - 2x + 6$ منها نجد $\frac{du}{dx} = 2x - 2$
- 3) $y' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos \mathrm{u}\ (2x - 2\ ) = \cos\ (x^2 - 2x + 6)\ (2x - 2\ )$
- 3) $y' = 2\ \ sinx \cos x + 2 \cos x\ \ (-sinx\ )$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $x^2 + y^2 = y + y^4$.

الحـــل

بأخذ المشتقة الأولى لكل حد، نجد أن:

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}y + \frac{d}{dx}y^4$$

إذن

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

نضع كل الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في طرف، وبقية الحدود في الطرف الآخر:

$$2x = (1 + 4y^3 - 2y)\frac{dy}{dx}$$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1 + 4y^3 - 2y}$$

في التمارين من 26 إلى 30، أوجد المشتقة الأولى المعطاة.

26) $y = \sin x^2$

27) $y = 8x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{4}{3}}$

28) $y = (x-1)(x+1)$

29) $y = x^2 \sin(3x)$

30) $y = (x^2+3)\sin(x/3)$