بسم الله الرحمن الرحيم

أساسيات الرياضيات
الفرقة الاولي أساسي لغة أنجليزية

إعداد

د. هدي حمدان مرداش

مدرس الرياضيات البحتة

2019/2020

العلاقات

العلاقات

- حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين
- علاقة ثنائية
- علاقة تكافؤ
- فصول التكافؤ

الثنائي المرتب

(a, b) (The Ordered Pairs)

يتكون من عنصرين a, b مرتبين

يسمي a الأحداثي الأول و b الأحداثي الثاني.

حاصل الضرب الكارتيزي للمجوعتين

(The Cartesian product of two Sets)

$$\boldsymbol{A \times B}$$

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a, b) : x \in A, y \in B\}}$$

مثال : وضح من خلال المثال الآتي أن

$$\mathbf{A \times B \neq B \times A}$$

$$\boldsymbol{A = \{x, y\}, B = \{1, 2, 3\}.}$$

$$\boldsymbol{A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}}$$

$$\boldsymbol{B \times A = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}}$$

العلاقة الثنائية (**Binary Relation**) :

يقال إن R علاقة بين المجموعتين A, B. إذا كانت $R \subseteq A \times B$, ويمكن كتابة $R \in (a,b)$ بالصورة $a\,R\,b$.

مجال العلاقة Domain of Relation

بفرض أن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإن مجموعة جميع المركبات الأولى للأزواج المرتبة في العلاقة تسمى مجال العلاقة R. ويرمز لها بالرمز D(R). أي أن:

$$D(R) = \{x : (x, y) \in R \text{ for } x \in A\}$$

أي أن:

$$D(R) \subseteq A.$$

مدى العلاقة Range of Relation

بفرض أن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B. فإن مجموعة جميع المركبات الثانية للأزواج المرتبة في العلاقة R تسمى مدى العلاقة R. ويرمز لها بالرمز R(R). أي أن:

$$R(R) = \{y : (x, y) \in R \text{ for } y \in B\}$$

أي أن:

$$R(R) \subseteq B$$

مثال:

بفرض أن:

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{5, 6, 7\}$$

بفرض أن العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B معرفة كالآتي:

$$R = \{(a, 5), (a, 6), (c, 6), (d, 6)\}$$

فإن:

$$D(R) = \{a, c, d\}, \qquad R(R) = \{5, 6\}$$

العلاقة العكسية Inverse Relation

بفرض أن R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإن معكوس العلاقة R هي علاقة من المجموعة B إلى المجموعة A ويرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كالتالي:

$$R^{-1} = \{(y,x); (x,y) \in R\}$$

مثال:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{4, 9, 10, 17, 25\}$

وبفرض أن العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B معرفة كالآتي:

$R = \{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (3, 17)\}$

وبالتالي فإن:

$$R^{-1} = \{(4,2),(9,3),(16,4),(17,3)\}$$

نظـــرية

إذا كانت R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B فإن:

I. $D(R) = R(R^{-1})$

II. $D(R^{-1}) = R(R)$

III. $(R^{-1})^{-1} = R.$

أنواع العلاقات

العلاقة R من A إلى B أربع أنواع:

❑ علاقة واحد إلى واحد	**one – one**
❑ علاقة واحد إلى متعدد	**one – many**
❑ علاقة متعدد إلى واحد	**many – one**
❑ علاقة متعدد إلى متعدد	**many - many**

تعريف العلاقة واحد إلى متعدد:

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B يقال أنها علاقة واحد إلى متعدد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R,\ (x_1, y_2) \in R$$

حيث أن

$$x_1 \in A, y_1, y_2 \in B \quad \text{and} \quad y_1 \neq y_2$$

تعريف العلاقة متعدد إلى واحد:

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B يقال أنها علاقة إلى متعدد واحد إذا كان:

$$(x_1, y_1) \in R,\ (x_2, y_1) \in R$$

حيث أن

$$x_1, x_2 \in A,\ y_1 \in B \quad \text{and} \quad x_1 \neq x_2$$

تعريف العلاقة متعدد إلى متعدد:

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B يقال أنها علاقة متعدد إلى متعدد إذا كان:

$$(x_1,y_1)\in R,\ (x_1,y_2)\in R,\ (x_2,y_1)\in R,\ (x_2,y_2)\in R$$

حيث أن

$$x_1,x_2\in A\ ,\ y_1,y_2\in B \text{ and } x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$$

الرسم البياني السهمي Arrow Diagram:

يستخدم الرسم البياني السهمي لتمثيل العلاقات.

اعتبر المثال الآتي:

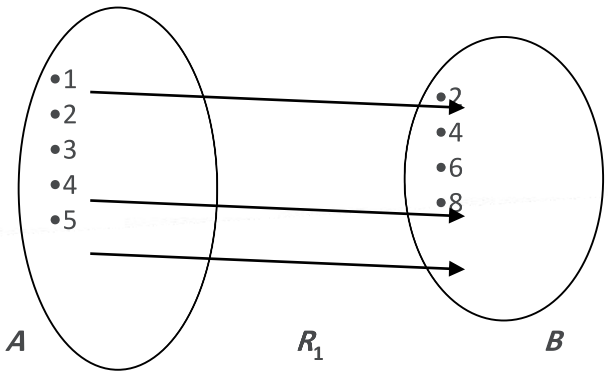
بفرض أن:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

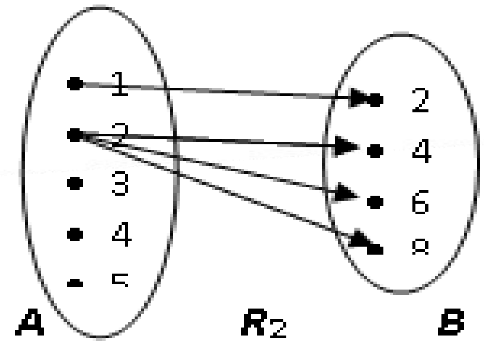
بفرض وجود أربع علاقات R_1, R_2, R_3, R_4 من المجموعة A إلى المجموعة B. معرفين كالآتي:

$$R_1 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$$
$$R_2 = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (1, 2)\}$$
$$R_3 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 8)\}$$
$$R_4 = \{(1, 4), (2, 4), (1, 8), (2, 8), (5, 2)\}$$

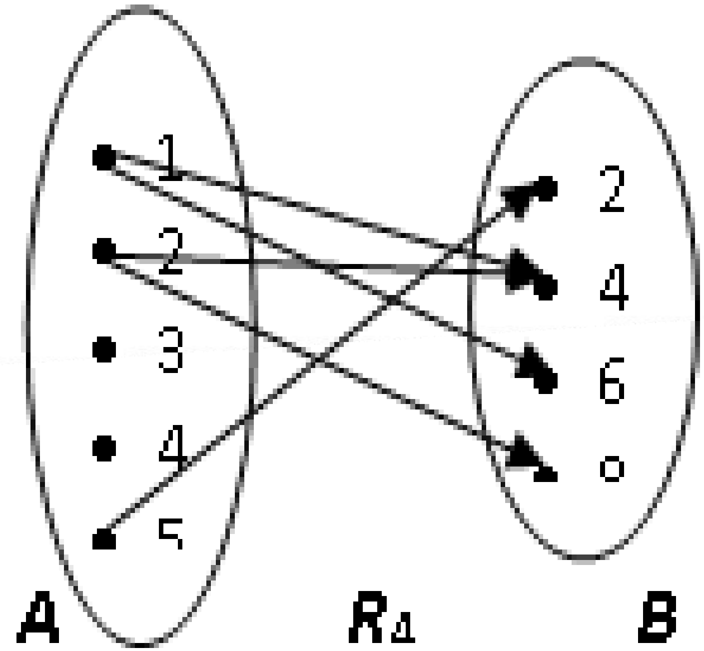
يمكن تمثيل العلاقات الأربع برسم بياني سهمي كالآتي:



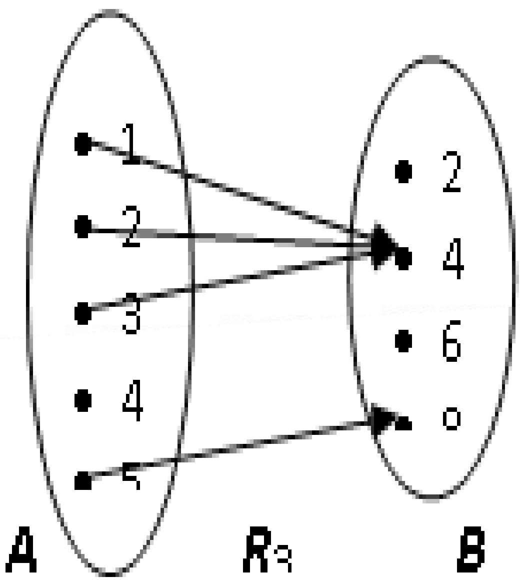
علاقة واحد إلى واحد



علاقة واحد إلى متعدد



علاقة متعدد إلى متعدد



علاقة متعدد إلى واحد

العلاقة الخالية

علاقة الوحدة

العلاقة الشاملة

العلاقة الخالية Void Relation :

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B يقال أنها علاقة خالية إذا كانت $R = \varnothing$.

مثال :

بفرض أن: $A = \{3, 5, 7\}, \quad B = \{2, 4, 8\}, \quad R \subseteq A \times B$

بفرض أننا عرفنا العلاقة R على أنها (x يكون في علاقة مع y إذا كان أن x يقسم y، أي أن عدد صحيح حيث أن $(y \in B, x \in A)$ $\frac{x}{y}$.

واضح أنه لا يوجد عناصر في المجموعة B تقبل القسمة على عناصر المجموعة A، أي أنه دائماً

$\frac{y}{x} \neq$ عدد صحيح، بالتالي فإن $R = \varnothing$.

علاقة الوحدة ***Identity Relation***:

بفرض أن R علاقة على المجموعة A، أي أن A مجموعة جزئية من $A \times A$، فإن العلاقة R يقال أنها علاقة وحدة إذا كان $(x, x) \in R$ ويرمز لها بالرمز I_A. أي أن:

$$I_A = \{(x, x): x \in A\}$$

مثال: بفرض أن $A = \{a, b, c\}$.

العلاقة I_A معرفة على المجموعة A بحيث:

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

واضح أن I_A هي علاقة وحدة على المجموعة A.

العلاقة الشاملة Universal Relation:

العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B يقال أنها علاقة شاملة إذا تساوت R مع $A \times B$. أي أن:

$$R = A \times B.$$

مثال:

بفرض أن:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}$$

بالتالي فإن العلاقة الشاملة R من المجموعة A إلى المجموعة B تعطى كالآتي:

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

نظـــرية

إذا كانت R_1علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B و R_2علاقة من المجموعة B إلى المجموعة C فإن:

$$(R_1R_2)^{-1} = R_2^{-1}R_1^{-1}$$

تعريف : نفرض أن R علاقة ثنائية علي مجموعة A فأن R تسمي :

- ✓ **عاكسة (Reflexive)**: إذا كانت

$(a,a) \in R, \forall a \in A$.

- ✓ **متماثلة (Symmetric)**: إذا كانت

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.

- ✓ **ناقلة (Transitive)** : إذا كانت

$(a,b) \in R, (b,c) \in R \Rightarrow (a,b) \in R$.

علاقة تكافؤ

(Equivalence relation)

عاكسة
ومتماثلة
وناقلة

Which of this Relations is equivalence relation on Z?

أي مما يلي علاقة تكافؤ في Z:

- $R = \{(x, y), x, y \in Z, \quad x + y = even\}$
- $(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b.$
- $(a, b) \in R \Leftrightarrow a^2 = b^2.$
- $(a, b) \in R \Leftrightarrow a \neq b.$
- $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$
- $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$

Solution

الحل

$$\mathbf{R} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}, \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{even} \text{ (زوجي)}\}$$

- العلاقة عاكسة:

$$x + x = 2x \in E.$$

- العلاقة متماثلة:

$$if\ x + y \in E \Rightarrow y + x \in E$$

- العلاقة ناقلة:

$$If\ x + y \in E, y + z \in E \Rightarrow$$
$$x + y = 2n, \qquad y + z = 2m$$

بالجمع

$$x + 2y + z = 2n + 2m$$
$$x + z = 2(n + m - y) \in 2Z = E$$

وبذلك تكون العلاقة علاقة تكافؤ.

- $(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b.$

حيث أن $a < a$ غير محققة فان العلاقة ليست عاكسة وبذلك لا تمثل علاقة تكافؤ.

- $(a, b) \in R \Leftrightarrow a^2 = b^2.$

- العلاقة عاكسة: $a^2 = a^2$
- العلاقة متماثلة:

$$a^2 = b^2 \Longrightarrow b^2 = a^2$$

- العلاقة ناقلة:

$$a^2 = b^2, b^2 = c^2 \Longrightarrow a^2 = c^2$$

وبذلك تكون العلاقة علاقة تكافؤ.

$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a\,d = bc$

(a,b) R (a, b) , ab = ba (العلاقة عاكسة)

$If\ (a,b)\ R\ (c,d) \Longrightarrow ad = bc \Longrightarrow cb = da$
$\Longrightarrow (c,d)\ R\ (a,b)$

(العلاقة متماثلة)

$If\ (a,b)\ R\ (c,d), (c,d) R\ (e,f) \Longrightarrow$
$ad = bc\ , cf = de \Longrightarrow d = \frac{bc}{a}\ , cf = \frac{bc}{a}\ e$
$\Longrightarrow f = \frac{be}{a} \Longrightarrow af = be \Longrightarrow (a,b) R\ (e,f\ )$

(العلاقة ناقلة)

وبذلك تمثل العلاقة علاقة تكافؤ.

$(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$ وبنفس الخطوات يمكن أثبات علاقة تكافؤ.

نظرية

إذا كانت R علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة A فإن R^{-1} تمثل أيضاً علاقة تكافؤ على المجموعة A.

طلابي الأعزاء
في انتظار أسئلتكم علي جروب الواتساب
بالنسبة للنظريات بدون برهان بالنسبة للشعب الغير متخصصة.

نلتقي بيكم علي خير في مقررات اخري

كن متفائلاً

شكراً لكم

مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق