

**بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ**

**الدوال الخاصة**

**كلية التربية – الفرقة الثالثة – شعبة الرياضيات-**

**الفيزياء – الكيمياء**

**دالة بيسل**

**د. هدي حمدان مرداش**

**2020**

# Bessel Function

دالة بيسل

Book(page 26)

دالة بيسل تحل المعادلة التفاضلية وهي

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (1)$$

لحل المعادلة السابقة نفرض

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

بالتفاضل بالنسبة ل  $x$  مرتين والتعويض في المعادلة (1) ثم

مقارنة الحدود نحصل علي  $J_n$  دالة بيسل وهي دالة في متغير

واحد  $x$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad (*)$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

**ملحوظة :** بالنسبة للاثبات غير مطلوب لامتحان ولكن بالنسبة لقسم الرياضيات (علوم – تربية) يجب فكه وفهمه جيدا. ويلزم حفظ الصورة الأخيرة (\*). يمكن كتابة دالة بيسل  $J_n(x)$  او  $J_n$  فقط.

## Recurrence Relations: (العلاقات التكرارية)

(مهمة مطلوبة من جميع الشعب بالاثبات).

$$1. \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}.$$

$$2. \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n-1}.$$

$$3. x J_n' = x J_{n-1} - n J_n.$$

$$4. x J_n' = n J_n - x J_{n-1}.$$

$$5. J_n' = \frac{1}{2} (J_{n-1} - J_{n+1}).$$

$$6. 2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

$$1. \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}$$

**Proof**

نكتب دالة بيسل  $J_n$  ثم بالضرب  $x^n$

$$J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^n}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

نجمع الأسس الخاصة ب  $x$  ثم نفاضل بالنسبة ل  $x$

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} 2^{n+2r} x^{2n+2r}$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2n+2r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1) 2^{n+2r}} x^{2n+2r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1) 2^{n+2r-1}} x^{2n+2r-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}, \quad \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+r)} = \Gamma(n+r)$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} = x^n J_{n-1}.$$

$$2. \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n-1}.$$

مثل برهان رقم (1) مع الاخذ في الاعتبار  $-n$  بدلا من  $n$

$$3. x J_n' = x J_{n-1} - n J_n.$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1} \quad \text{باستخدام العلاقة الاولى}$$

بتطبيق التفاضل علي الطرف الأول نحصل علي

$$x^n J_n' + n x^{n-1} J_n = x^n J_{n-1}$$

بالقسمة علي  $x^{n-1}$

$$x J_n' + n J_n = x J_{n-1}$$

$$\text{Or} \quad x J_n' = x J_{n-1} - n J_n$$



4.  $xJ'_n = nJ_n - xJ_{n-1}$ .

مثل برهان رقم (3) مع الاخذ في الاعتبار  $-n$  بدلا من  $n$

• بجمع (3) و(4) نحصل علي العلاقة (5)

• بطرح (3) من (4) نحصل علي (6)

5.  $J'_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$ .

6.  $2nJ_n = x(J_{n+1} + J_{n-1})$



**Generation Function** for  $J_n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}$

Keep it is important but the proof for reading.



## Worked out Problems

1.  $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

Solution:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

بوضع  $-x$  بدلاً من  $x$

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{-x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

# Find $J_0, J_1$

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

بالتعويض عن  $n=0$  ثم بفك المجموع علي  $r$ . (فك المجموع يعني التعويض عن  $r$  ابتداءً من الصفر ثم 1 ثم 2 وهكذا)

$$J_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

$$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma 3 \Gamma(3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

$$\text{So, } J_0(0) = 1, J_0(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \dots, \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}$$

$$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^1 + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

**So,**  $J_1(0) = 0, J_1(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots$

بالنسبة ل  $J_2, J_3, J_4, \dots$  يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل استخدام العلاقات

التكرارية والحصول عليهم بدلالة  $J_0, J_1$  وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

عند  $n = 1$

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$2 J_1 = x (J_2 + J_0)$$

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$


عند  $n = 2$

$$2 J_2 = x (J_3 + J_1)$$

$$2 \left( \frac{2}{x} J_1 - J_0 \right) = x (J_3 + J_1)$$

$$J_3 = \left( \frac{8 - x^2}{x^2} \right) J_1 - \frac{4}{x} J_0$$

و عند  $n = 3$  نحصل علي  $J_4$  وهكذا.


$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

الاثبات بنفس الطريقة السابقة بالتعويض عن  $n = \frac{1}{2}$  في دالة بيسل نحصل علي

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned}$$

By the same way  $J_{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

ملحوظة: نحتاج نحفظ صيغة  $J_{\frac{-1}{2}}$  و  $J_{\frac{1}{2}}$  لاستخدامها في حلول باقي المسائل.

بالنسبة لـ  $J_{\frac{-5}{2}}, J_{\frac{5}{2}}, J_{\frac{-3}{2}}, J_{\frac{3}{2}}$  يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل استخدام العلاقات التكرارية والحصول عليهم بدلالة  $J_{\frac{-1}{2}}, J_{\frac{1}{2}}$  وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

عند  $n = 1/2$

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$J_{1/2} = x (J_{3/2} + J_{-1/2})$$

$$J_{3/2} = \frac{1}{x} J_{1/2} - J_{-1/2} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

عند  $n = 3/2$

$$3 J_{3/2} = x (J_{5/2} + J_{1/2})$$

$$J_{5/2} = \frac{3}{x} J_{3/2} - J_{1/2} = \frac{3}{x} \left( \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \left( \frac{3 - x^2}{x^2} \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right]$$

طلابي الأعداء بالنسبة للشعب الغير متخصصة (الكيمياء –  
الفيزياء) مطلوب منكم من مثال رقم (1) الي مثال رقم (10).

أما بالنسبة للطلاب المتخصصين رياضيات (كلية العلوم – كلية  
التربية) هنكمل باقي الأمثلة ونتناقش فيها ع جروب الواتساب.

وبالنسبة للتمارين الغير محلولة مطلوب من جميع الشعب حل  
أول 18 تمارين في أختار من متعدد (42, 43, 44)Page.  
وسؤال صح أو خطأ (page 49).



كونوا متفائلين.  
ودمتم سالمين



شكراً لكم  
مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق