Geometry in 2D هندسة تحليلية
الفرقة الأولى أساسي رياضيات إنجليزي
The First Year Primary English Mathematics

The Circle   الدائرة

Definition of the circle:

The geometrical point of a point moving in a plane so that its distance from a fixed point in the plane (known as the center) is always equal to a constant amount (called the radius of radius).

تعريف الدائرة:

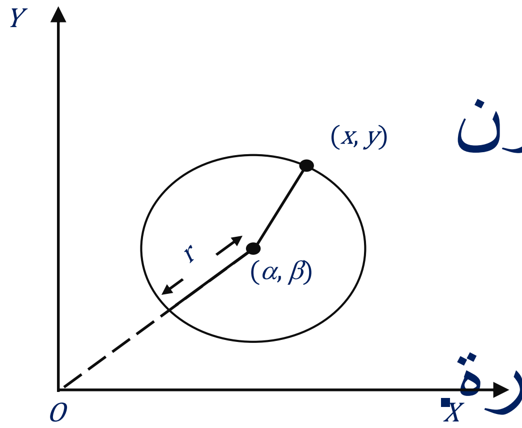
هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة في المستوى (تسمى المركز Center) يساوي دائماً مقدار ثابت (يسمى بنصف القطر radius).

The Circle الدائرة

1)The Cartesian equation for the circle if its center (α, β) and radius r:

Assume that (x, y) is any point on the circumference of a circle. So from the previous definition it is $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ (1)

This relationship is valid for all points of the circle's circumference, so it represents the equation of the circle.



١) المعادلة الكارتيزية للدائرة إذا كان مركزها (α, β) ونصف قطرها r:

نفرض أن (x, y) أي نقطة على محيط دائرة. إذن من التعريف السابق يكون

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \quad (1)$$

هذه العلاقة صحيحة لجميع نقاط محيط الدائرة فهي إذن تمثل معادلة الدائرة.

The Circle الدائرة

special cases:

i- If the center of the circle is the point of origin and radius r, then its equation is:

$$x^2 + y^2 = r^2 (i)$$

It is the equation of a circle in its simplest form.

ii- If the center of the circle is a point on the OX axis i.e. $\beta = 0$ the equation is:

$(x-\alpha)^2 + y^2 = r^2$ (ii)

iii. If the center of the circle is a point on the OY axis i.e. $\alpha = 0$ the equation is:

$x^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ (iii)

حالات خاصة:

i- إذا كان مركز الدائرة نقطة الأصل ونصف قطرها r

فإن معادلتها تكون: $x^2 + y^2 = r^2$ (i)

وهي معادلة الدائرة في أبسط صورها .

ii- إذا كان مركز الدائرة نقطة على محور OX أي أن $\beta = 0$

كانت المعادلة: $(x-\alpha)^2 + y^2 = r^2$ (ii)

iii- إذا كان مركز الدائرة نقطة على محور OY أي أن $\alpha = 0$

كانت المعادلة:

$$x^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \quad \text{(iii)}$$

The Circle الدائرة

2) The general equation of the circle:

Equation (1) can be written on the form (in brackets):

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Or $\quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

where $\quad g = -\alpha, f = -\beta, c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

٢) المعادلة العامة للدائرة:

يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة (بفك الأقواس):

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

أو $\quad (2) \ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

حيث $\quad g = -\alpha, f = -\beta, c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$

The Circle الدائرة

Equation (2) is called the general equation of the circle and its most important characteristics: المعادلة (2) تسمى بالمعادلة العامة للدائرة وأهم صفاتها:

i) it is quadratic in x, y.

ii) x^2 coefficient = y^2 coefficient

iii) xy coefficient = zero

iv) Its center $(-g, -f)$ radius $\boldsymbol{r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}}$

i. أنها من الدرجة الثانية في x, y.

ii. معامل x^2 = معامل y^2.

iii. معامل xy = صفر

iv. مركزها $(-g, -f)$ ونصف قطرها $\boldsymbol{r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}}$

The Circle الدائرة

Note:

If the amount is $g^2 + f^2 - c$

(i) Negative, the circle is imaginary.

(ii) equals zero, the circle was one point.

(iii) Positive, the circle is real centered $(-g, -f)$

ملاحظة:

إذا كان المقدار $g^2 + f^2 - c$

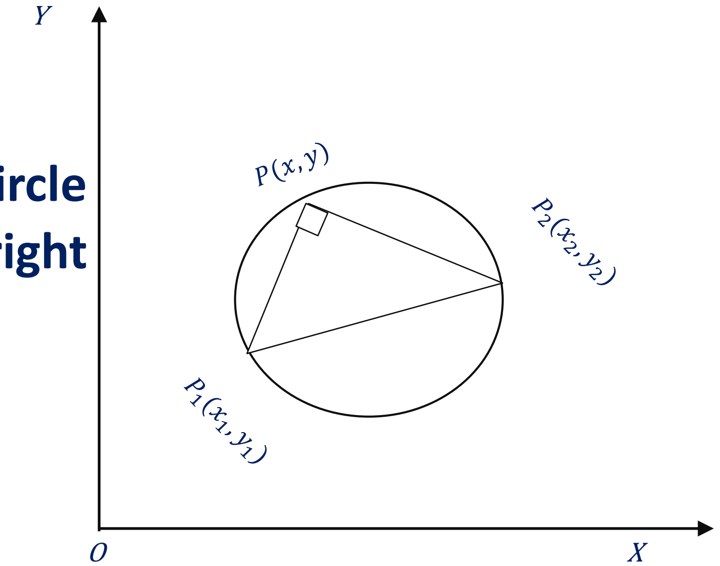
(i) سالب كانت الدائرة تخيلية.

(ii) يساوي صفر كانت الدائرة نقطة واحدة.

(iii) موجب كانت الدائرة حقيقية مركزها $(-g, -f)$.

The Circle الدائرة

3) The Cartesian equation of the circle with the information of the two ends of diameter:



Suppose that the points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ are the ends of the diameter in the circle and that P (x, y) is one of the circumference points then the angle P_1PP_2 is upright and is: PP_1 slope x P_2P slope = -1

That is $$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

Or $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ **(3)**

Since this relationship is correct for all ocean points, it represents the required circle equation.

٣) المعادلة الكارتيزية للدائرة بمعلومية نهايتي قطر فيها:

نفرض أن النقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ هما نهايتي قطر في الدائرة وأن $P(x,y)$ هي إحدى نقاط المحيط فإن الزاوية P_1PP_2 تكون قائمة ويكون:

ميل PP_1 × ميل P_2P = -1 أي ان: $$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

أو $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ (3) وحيث أن هذه العلاقة صحيحة لجميع نقط المحيط فهي تمثل معادلة الدائرة المطلوبة.

The Circle الدائرة

(4) The relationship between the straightline and the circle:

The line cuts the circle in two points, which we get from solving their equations simultaneously. These two points are:

i)Two different realities in which the rectum cuts the circle as shown in Figure (i).

ii)Two areas in which the straightline touches the circle, as in Figure (ii).

iii)Two imaginations in which the straightline does not cross the circle as shown in Figure (iii).

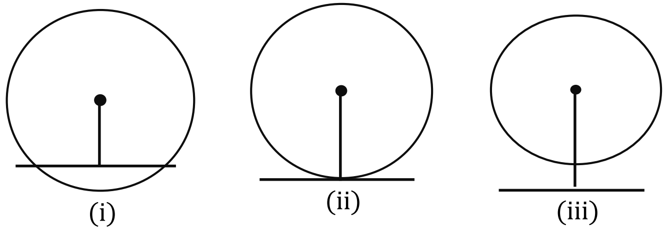
(٤) العلاقة بين المستقيم والدائرة:

المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين نحصل عليهما من حل معادلتيهما آنياً وهاتين النقطتين تكونان:

i. حقيقيتان مختلفتان وفيها يقطع المستقيم الدائرة كما في الشكل (i).

ii. منطبقتان وفيها يمس المستقيم الدائرة كما في الشكل (ii).

iii. تخيليتان وفيها لا يقطع المستقيم الدائرة كما في الشكل (iii).



The Circle الدائرة

These past cases can be identified analytically as follows:

Assume that the equation of the straight line is $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

And the equation of the circle is $\boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+d=0}$. Its center **(-*g*, -*f*)** is a description of its diameter equal to $\sqrt{\boldsymbol{g^2+f^2-d}}$ and the straight line is cut or tangent or does not cut the circle depending on whether the column falling from the center of the circle is smaller or equal to or greater than its radius i.e. Depending on the relationship $\frac{\boldsymbol{a(-g)+b(-f)+c}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}} \lesseqqgtr \sqrt{\boldsymbol{g^2+f^2-d}}$

ويمكن التعرف على هذه الحالات السابقة تحليلياً كما يلي: نفرض أن معادلة المستقيم هي $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

وأن معادلة الدائرة هي $\boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+d=0}$ مركزها **(-*g*, -*f*)** وصف قطرها يساوي $\sqrt{\boldsymbol{g^2+f^2-d}}$
ويكون المستقيم قاطعاً أو مماساً أو لا يقطع الدائرة حسب ما إذا كان العمود الساقط من مركز الدائرة أصغر أو يساوي أو أكبر من نصف قطرها أي حسب العلاقة $\sqrt{\boldsymbol{g^2+f^2-d}} \lesseqqgtr \frac{\boldsymbol{a(-g)+b(-f)+c}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2+b^2}}}$

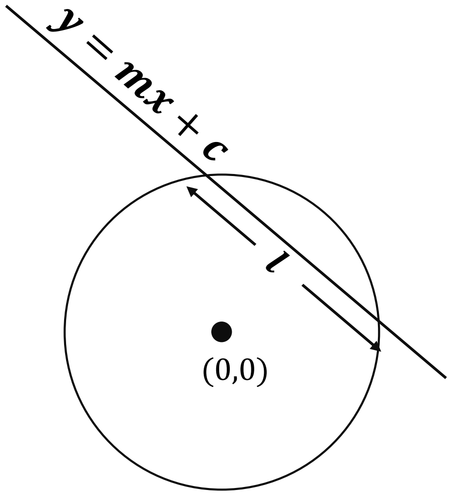
The Circle الدائرة

(a)The length of a section crossed by a straight line:

Suppose the equations for the circle and the straight line are respectively

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad y = mx + c$$

The length of the cut part of the straight line in the circle = l



$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 2\left(\frac{r^2(1 + m^2) - c^2}{1 + m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(a) طول الجزء الذي تقطعه دائرة من خط مستقيم:

نفرض أن معادلتي الدائرة والخط المستقيم هما على الترتيب

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad y = mx + c$$

طول الجزء المقطوع من الخط المستقيم بالدائرة $l=$

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 2\left(\frac{r^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

The Circle الدائرة

Straight line Contact Condition $y = mx + c$ straight line Circle

For every touches straight line $\boldsymbol{y = mx + c}$ the circle $x^2 + y^2 = r^2$ should be the length of the segment of the straight line in the circle must be equal to zero. From the equation

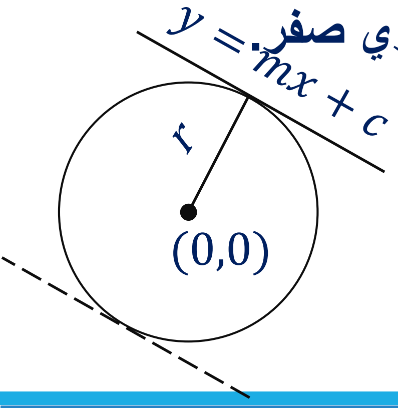
$$c^2 = r^2(1 + m^2)\ (4)$$

That is $c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$. It is the required condition.

Hence, the equation of the line is $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ (5)

(b) شرط تماس المستقيم $y = mx + c$ المستقيم للدائرة $x^2 + y^2 = r^2$

لكل يمس المستقيم $y = mx + c$ الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ يجب أن يكون طول الجزء المقطوع من المستقيم بالدائرة يساوي صفر.



من المعادلة (4): $c^2 = r^2(1 + m^2)$ أي أن $c = \pm r\sqrt{1 + m^2}$ هو الشرط المطلوب.

ومن ثم تكون معادلة المستقيم هي: $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

The Circle الدائرة

Another method to touch the condition of the straight line $y = mx + c$ of the circle $x^2 + y^2 = r^2$

In order for touch to occur between the straight line and the circle, the length of the falling column from the center (0, 0) on the straight line $y = mx + c$ must be equal to the radius r, i.e.$r = \pm \frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$.

Thus the line (5) touches the circle $x^2 + y^2 = r^2$ for all m values.

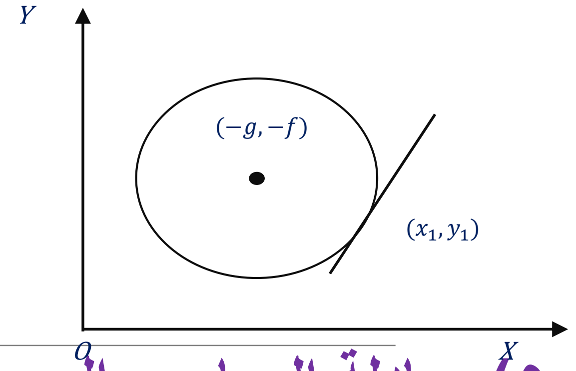
Note from equation (5) that if m knows that two parallel tangent equations can be obtained for the presence of the signals

طريقة أخرى لاستنتاج شرط تماس المستقيم $y = mx + c$ للدائرة $x^2 + y^2 = r^2$

لكي يحدث تماس بين المستقيم والدائرة يجب أن يكون طول العمود الساقط من المركز (0, 0) على المستقيم $y = mx + c$ مساوياً نصف القطر r أي أن: $r = \pm \frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$ وعلى ذلك فإن المستقيم (5) يمس الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لجميع قيم m.

يلاحظ من المعادلة (5) أنه إذا علمت m أنه يمكن الحصول على معادلتي مماسين متوازيين لوجود الإشارتين $\pm$.

The Circle الدائرة



The tangent and vertical equation of a circle at a point on it:

Assume that the equation of the circle is in the general picture

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad (2)$$

The tangent at any point on the circle (2) is $\frac{dy}{dx}$

The tangent formula is $\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

Or $xx_1+yy_1+xg+yf=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$

ه) معادلة المماس والعمودي لدائرة عند نقطة عليها:

نفرض أن معادلة الدائرة في الصورة العامة

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad (2)$$

ميل المماس عند أي نقطة على الدائرة (2) هو $\frac{dy}{dx}$

وتكون معادلة المماس هي $\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_1+g}{y_1+f}$

أو

$$xx_1+yy_1+xg+yf=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$$

The Circle الدائرة

The column equation for the circle at the point (x_1, y_1)on the circle (2) is

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

or

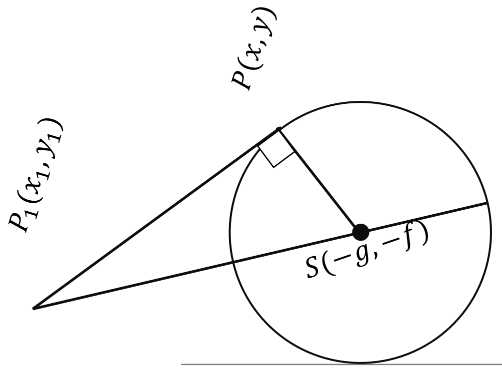
$$y - y_1 = \frac{y_1+f}{x_1+g}(x - x_1)$$

فمعادلة العمود للدائرة عند النقطة (x_1,y_1) على الدائرة (2) هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

أو

$$y - y_1 = \frac{y_1+f}{x_1+g}(x - x_1)$$



The Circle الدائرة

The length of the tangent drawn from a point of the circle in its general image:

From the geometry of the figure we conclude that

$$|P_1P|^2 = |P_1S|^2 - r^2$$
$$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \quad (8)$$

So the square of the tangential length drawn from the point $P_1(x_1, y_1)$ of the circle in its general form can be obtained directly by substituting the coordinates of the point in the circle equation as shown by the relationship (8).

طول المماس المرسوم من نقطة للدائرة فى صورتها العامة:

من هندسة الشكل نستنتج أن

$$|P_1P|^2 = |P_1S|^2 - r^2$$
$$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c \quad (8)$$

إذن مربع طول المماس المرسوم من نقطة $P_1(x_1,y_1)$ للدائرة في صورتها العامة يمكن الحصول عليها مباشرة بالتعويض بإحداثيات النقطة في معادلة الدائرة كما هو واضح من العلاقة (8).

The Circle الدائرة

Radial Axis for two circuits:

<u>Definition of the primary axis</u>: is the geometrical place of a moving point so that the tangents drawn from it to each of the two circles are equal in length.

If the equations for the two circles are:

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \text{(ii)}$$

And the point (x_1, y_1)satisfies this condition (the length of the two tangent lines of (x_1, y_1) for the two circles is equal)

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \varphi_2(x_1, y_1) \quad \text{(iii)}$$

٧) المحور الأساسي Radial Axis لدائرتين:

<u>تعريف المحور الأساسي:</u> هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون المماسين المرسومين منها إلى كل من الدائرتين متساوية في الطول.

فإذا كانت معادلتا الدائرتين هما:

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \text{(i)}$$

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \text{ (ii)}$$

والنقطة (x_1,y_1) تحقق هذا الشرط (طول المماسين المرسومين من (x_1,y_1) للدائرتين متساوي)

$$\varphi_1(x_1, y_1) = \varphi_2(x_1, y_1) \qquad \text{(iii)}$$

The Circle الدائرة

or

$$\varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_2(x_1, y_1) = 0 \text{ (iii)'}$$

Equation (iii) leads to

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0 \text{ (9)}$$

These represent the equation for the basic axis of the two circles and can be obtained from subtracting the equations of the two circuits.

أو

$$\varphi_1(x_1, y_1) - \varphi_2(x_1, y_1) = 0 \text{ (iii)'}$$

المعادلة (iii) تؤول إلى

$$2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0 \text{ (9)}$$

وهذه تمثل معادلة المحور الأساسي للدائرتين ويمكن الحصول عليها من طرح معادلتي الدائرتين.

The Circle الدائرة

<u>Notes:</u>

1- If the two circles are connected, the main axis is the common tangent

If the two circles are intersecting, the primary axis is the common chord.

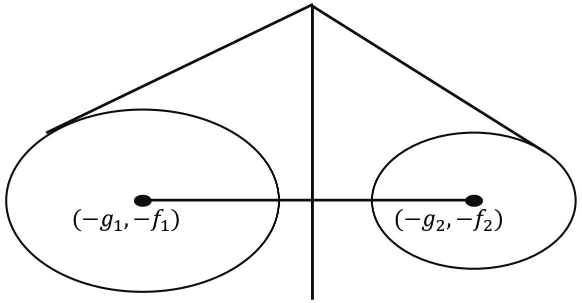
If the two circles are not intersecting, the primary axis is the geometrical point of the point from which two equal tangents can be drawn to each of the two circles.

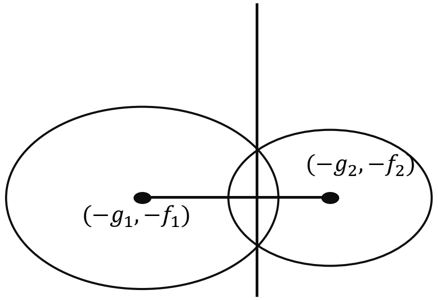
<u>ملاحظات:</u>

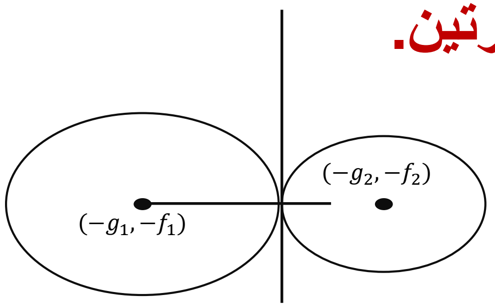
١- إذا كانت الدائرتين متماستان كان المحور الأساسي هو المماس المشترك.

إذا كانت الدائرتين متقاطعتين كان المحور الأساسي هو الوتر المشترك.

إذا كانت الدائرتين غير متقاطعتين كان المحور الأساسي هو المحل الهندسي للنقطة التي يمكن منها رسم مماسين متساويين إلى كل من الدائرتين.







The Circle الدائرة

2- By solving the primary axis equation (9) with one of the equations of the two circles (i), (ii) we get the intersection points.

3- The primary axis is a straight line perpendicular to the center line.

٢- بحل معادلة المحور الأساسي (9) مع إحدى معادلتي الدائرتين (i), (ii) نحصل على نقطتي التقاطع.

٣- المحور الأساسي هو خط مستقيم عمودي على خط المركزين.

The Circle الدائرة

System of Circles

If we have two circles $\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ (i)

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \text{(ii)}$$

The equation $\varphi_1(x,y) + k\varphi_2(x,y) = 0$ (10)

Where k is a parameter of the remaining terms. The family of the united circles represents the axis with $(\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0)$ that passes the intersection points of the two circles $\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0$ for all values of k.

٨) عائلة الدوائر System of Circles

إذا كان لدينا الدائرتين

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \text{(ii)}$$

فإن المعادلة

$$\varphi_1(x,y) + k\varphi_2(x,y) = 0 \quad (10)$$

حيث k بارامتر يتعين من باقي الشروط. تمثل عائلة الدوائر المتحدة المحور مع $(\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0)$ التي تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين $\varphi_1(x,y) = 0, \varphi_2(x,y) = 0$ وذلك لجميع قيم k.

The Circle الدائرة

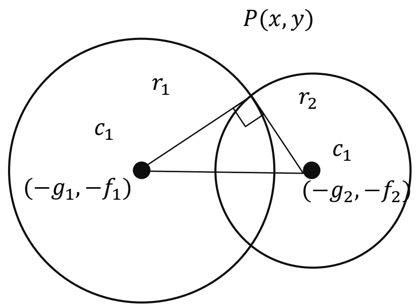
Note:

The equation for the basic axis of the two circles (ii), (i) can be deduced by setting $k = -1$ in (10).

ملاحظة:

يمكن استنتاج معادلة المحور الأساسي للدائرتين (ii), (i) وذلك بوضع $k = -1$ في (10).

The Circle الدائرة



The angle between two circles:

Definition:

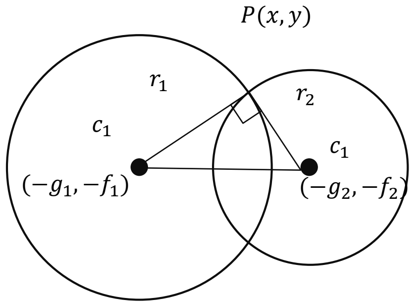
The angle between two intersecting circles is defined as the angle between the two tangents marked at one of the intersection points.

الزاوية بين دائرتين:

تعريف:

تعرف الزاوية بين دائرتين متقاطعتين بأنها الزاوية المحصورة بين المماسين المرسومين عند إحدى نقطتي التقاطع.

The Circle الدائرة



The condition of orthogonality to two circles:

The two circles are intersecting on the perpendicular if it touches the tangent of each circle at the point of intersection with the center of the other circle. That is, the angle between the two tangents marked at any point of intersection

شرط تعامد دائرتين:

تكون الدائرتان متقاطعتان على التعامد إذا مس المماس لكل دائرة عند نقطة التقاطع بمركز الدائرة الأخرى. أي أن الزاوية بين المماسين المرسومين عند أي نقطة من نقط التقاطع قائمة

The Circle الدائرة

The orthogonal condition for the two circles is

$$(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$$

And these after the abbreviation give

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2 \quad (16)$$

شرط التعامد للدائرتين هو

$$(g_1 - g_2)^2 + (f_1 - f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$$

وهذه بعد الاختصار تعطي

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2 \ (16)$$

The Circle الدائرة

Example (1): Write the equation of the circle with a center (2, -1) and a radius of 2

The solution:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

مثال(١): اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (2,-1) ونصف قطرها 2

الحل:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4$$

The Circle الدائرة

Example (2): Find the equation of the circle whose center is (-4, -5) and passes the point (1.4)

مثال(٢): أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (-4,-5) وتمر بالنقطة(1,4)

The solution:

الحل:

$$(x+4)^2+(y+5)^2=r^2,$$

$$(1+4)^2+(4+5)^2=r^2,$$

$$r^2=106$$

$$(x+4)^2+(y+5)^2=106$$

$$(x+4)^2+(y+5)^2=r^2,$$

$$(1+4)^2+(4+5)^2=r^2,$$

$$r^2=106$$

$$(x+4)^2+(y+5)^2=106$$

The Circle الدائرة

Example (3): Find the value of the constant k in the following equation

$$(x-4)^2+(y-k)^2=25$$

If it passes the point of origin.

The solution:

$$(0-4)^2+(0-k)^2=25$$

$$k^2=25\text{-}16\text{=}9$$

$$(x-4)^2+(y\pm 3)^2=25$$

مثال(٣): أوجد قيمة الثابت k في المعادلة الآتية

$$(x-4)^2+(y-k)^2=25$$

إذا كانت تمر بنقطة الأصل.

الحل:

$$(0-4)^2+(0-k)^2=25$$

$$k^2=25\text{-}16\text{=}9$$

$$(x-4)^2+(y\pm 3)^2=25$$

The Circle الدائرة

<u>Example (4):</u> Find the center coordinates and radius length

$$x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$$

<u>The solution:</u>

Center (-4, -5)

Radius $= \sqrt{16 + 25 + 8} = 7$

By Completing the square

$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) - 8 = 0$

$(x + 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 - 8 = 0$

$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$

Center (-4, -5) and radius = 7

<u>مثال(٤):</u>أوجد إحداثيات المركز وطول نصف القطر

$$x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$$

<u>الحل:</u>

المركز (-4,-5)

نصف القطر(نق)= $\sqrt{16 + 25 + 8} = 7$

بإكمال المربع $(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) - 8 = 0$

$(x + 4)^2 - 16 + (y + 5)^2 - 25 - 8 = 0$

$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$

المركز(-4,-5) ونصف القطر= 7

The Circle الدائرة

Example (5): Convert the following equation for the vertical image of the circle and find the center and radius

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 5 = 0$$

The solution:

Center (-3,5)

radius $= \sqrt{9 + 25 - 5} = \sqrt{29}$

Completing the square

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 = 29$$

$$r = \sqrt{29}$$

مثال(٥): حول المعادلة الآتية للصورة العمودية للدائرة وأوجد المركز ونصف القطر

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 5 = 0$$

الحل:

المركز (-3,5)

نق= $\sqrt{9 + 25 - 5} = \sqrt{29}$

بإكمال المربع $(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 = 29$

$$r = \sqrt{29}$$

The Circle الدائرة

Example (6): Study the position of points (2,4), (7,2), (0,3) for the circle

$$x^2 + y^2 - 4x = 12$$

The solution:

$$x^2 + y^2 - 4x = 12 \Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 16$$

Center (2,0) and radius $r = \sqrt{4+12} = 4$

(0,3) $(0-2)^2 + 9 = 13 < 16$ The circle is inside

(7,2) $(7-2)^2 - 4 = 21 > 16$ It is outside the circle

(2,4) $(2-2)^2 + 4^2 = 16 = 16$ It is Lies on the circle

مثال(٦): إدرس موضع النقاط (2,4), (7,2),(0,3) بالنسبة للدائرة

$$x^2 + y^2 - 4x = 12$$

الحل:

$$x^2 + y^2 - 4x = 12 \Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 16$$

المركز (2,0) ونصف القطر $r = \sqrt{4+12} = 4$

(0,3) $(0-2)^2 + 9 = 13 < 16$ تقع داخل الدائرة

(7,2) $(7-2)^2 - 4 = 21 > 16$ تقع خارج الدائرة

(2,4) $(2-2)^2 + 4^2 = 16 = 16$ تقع على الدائرة

The Circle الدائرة

Example (7): Indicate the position of the lines i, ii, iii in about to the circle

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

i) $\boldsymbol{4x + 3y = 42}$ ii) $y = 1$ iii) $\boldsymbol{-3x - 24 = 0}$

Solution: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

Center (2,3) and radius = 5

i) $\boldsymbol{d} = \left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{4(2)+3(3)-42}{\sqrt{16+9}}\right| = 5$ tangent

ii) $\boldsymbol{d} = \left|\frac{2(0)+1(3)-1}{\sqrt{0+1}}\right| = 2$ interrupts

iii) $\boldsymbol{d}\ \left|\frac{3(2)+4(-3)-24}{\sqrt{16+9}}\right| = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6$ outside

مثال(٧):وضح موضع المستقيمات i,ii,iii بالنسبة للدائرة

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

i) $4x + 3y = 42$ ii) y=1

iii) $4y - 3x - 24 = 0$

الحل: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

المركز (2,3) ونصف القطر = 5

i) $d = \left|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\frac{4(2)+3(3)-42}{\sqrt{16+9}}\right| = 5$ مماس

ii) $\left|\frac{2(0)+1(3)-1}{\sqrt{0+1}}\right| = 2$ قاطع

iii) $\left|\frac{3(2)+4(-3)-24}{\sqrt{16+9}}\right| = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6$ خارج

The Circle الدائرة

مثال(٨): أوجد معادلة الدائرة التى نهايتي قطر فيها (0,2), (-1,-2) ثم أوجد المركز ونصف القطر

الحل:

$$(x-0)(x+1)+(y-2)(y+2)=0$$

$$x^2+x+y^2+2y-4=0$$

$$x^2+y^2+x+2y-4=0$$

المركز $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ونصف القطر

$$r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{1}{4}+0+4}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

Example (8): Find the equation of the circle in which the two ends of diameter are (-1, -2), (0,2) then find the center and radius

The solution:

$$(x-0)(x+1)+(y-2)(y+2)=0$$

$$x^2+x+y^2+2y-4=0$$

$$x^2+y^2+x+2y-4=0$$

Center $(-1/2, 0)$ and radius

$$r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{1}{4}+0+4}=\sqrt{\frac{17}{2}}$$

The Circle الدائرة

Example (9): Find the length of the tangent drawn from point (7,9) for the circle

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

The solution:

$$|pp1| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c}$$

$$|pp1| = \sqrt{(7)^2 + (9)^2 + (-4)7 + 6(9) + (-12)} = 12$$

So the drawn tangent length = 12 unit length

مثال(٩): أوجد طول المماس المرسوم من نقطة (7,9) للدائرة

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

الحل:

$$|pp1| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c}$$

$$|pp1| = \sqrt{(7)^2 + (9)^2 + (-4)7 + 6(9) + (-12)} = 12$$

اذن طول المماس المرسوم = 12 وحدة طول

The Circle الدائرة

Example (10): Find the basic axis equation for the following two circles:

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 = 0$$

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$

The solution:

The equation for the fundamental axis of the two circles is $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$

$$2x + 2y - 6 = 0$$

So the equation for the fundamental axis of the two circles is $x + y - 3 = 0$

مثال(١٠): أوجد معادلة المحور الأساسي للدائرتين الآتيتين:

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 4y - 7 = 0$$

$$\varphi_2(x,y) = x^2 + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$

الحل:

معادلة المحور الأساسي للدائرتين هي $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$

$$2x + 2y - 6 = 0$$

اذن معادلة المحور الأساسي للدائرتين هي $x + y - 3 = 0$

تم الإنتهاء من المحاضرة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته