جامعة دمياط
كلية العلوم
قسم الرياضيات

المعادلات التفاضلية

الباب الأول
مقدمة

(١-١) مقدمة

نعلم من دراستنا السابقة أنه إذا كانت $x = f(t)$ دالة تفاضلية (أي قابلة للتفاضل) حيث t المتغير المستقل و x المتغير التابع فإنه يمكن حساب $\frac{dx}{dt}$ وهي هندسياً تمثل ميل المماس للمنحنى $x = f(t)$ وجبرياً معدل تغير الدالة x بالنسبة للمتغير t. أيضاً يمكن حساب $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ وكذلك يمكن حساب المشتقات الأعلى إذا كانت الدالة قابلة لذلك.

فإذا كانت x هي المسافة و t هو الزمن فإن $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ تمثل سرعة جسيم يتحرك على المحور x عند أي لحظة t. وتكون عجلة الجسم عند أي لحظة هي $\frac{d^2x}{dt^2}$ فإذا كان هناك جسم يتحرك في خط مستقيم هو المحور x بحيث تكون سرعته عند أي لحظة t تساوي مقدار ثابت α فإن:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \qquad (1)$$

كذلك إذا كان هناك جسيم يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير قوة مقدارها $\alpha\, x$ حيث x بعد الجسيم عن نقطة ثابتة فإن معادلة حركته طبقاً لقانون نيوتن هي:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\, x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta x \qquad (2)$$

حيث $\frac{\alpha}{m} = \beta =$ ثابت، m كتلة الجسيم.

يلاحظ أن المعادلتان (2) ,(1) هما ببساطة علاقتين بين المتغير التابع x ومشتقة ذلك المتغير بالنسبة للمتغير المستقل t.

تعريف (١):

المعادلة التفاضلية هي علاقة بين المتغير التابع x ومشتقاته والمتغير المستقل t.

مثال (١):

اكتب المعادلة التفاضلية التي تمثل منحنى الدالة $y = f(x)$ والتي يكون فيها ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة (x, y) مساوياً لمجموع بعدي النقطة عن المحورين x, y.

الحـــل

ميل المماس عند أي نقطة هو $\frac{dy}{dx}$

ومجموع بعدي النقطة عن المحاور هو $(x + y)$ وعلى ذلك يكون:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \qquad (3)$$

مثال (٢):

اكتب المعادلة التفاضلية التي تمثل حركة جسيم يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير عجلة تتناسب عند أي لحظة مع سرعة الجسيم وثابت التناسب هو λ.

الحــل

نفرض أن الجسيم يتحرك على المحور x وأن t تمثل الزمن. سرعة الجسيم هي $\frac{dx}{dt}$ وعجلته $\frac{d^2x}{dt^2}$ والمعادلة التفاضلية للحركة هي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{dx}{dt}$$

مثال (٣):

إذا كان لتر الكحول يتبخر بمعدل يتناسب مع كمية الكحول الموجودة حيث ثابت التناسب α اكتب المعادلة التفاضلية التي تمثل كمية الكحول الموجودة عند أي لحظة t.

الحــل

بفرض أن كمية الكحول الموجود عند أي لحظة هي Q فإن معدل تناقص الكحول هو $\frac{dQ}{dt}$ علماً بأن:

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q$$

تعريف (٢):

حل المعادلة (بصفة عامة) هو إيجاد المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل بحيث يكون ومشتقته تحقق المعادلة التفاضلية.

أمثلة:

حل المعادلة التفاضلية (1) هو

$$x = \alpha t + c$$

وذلك لأي ثابت c لأن x و $\frac{dx}{dt}$ تحقق المعادلة (1).

(٢) حل المعادلة التفاضلية (2) هو

$$x = c_1 e^{\sqrt{\beta}\, t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta}\, t}$$

حيث c_1, c_2 مقادير ثابتة وذلك لأي x و $\frac{d^2x}{dt^2}$ تحقق المعادلة (2)

(٣) حل المعادلة التفاضلية (3) بالصورة

$$y = ce^x - (1 + x)$$

وذلك لأي مقدار ثابت c.

(تحقق من أن $\frac{dy}{dx}$ y, تحقق المعادلة (3)).

(١-٢) تصنيف المعادلات التفاضلية:

لنأخذ في الاعتبار المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{2}$$

$$xy' + y^2 = x^2 + 1 \tag{3}$$

$$y''' + 2(y')^4 + yy' = \ln x \tag{4}$$

$$(y'')^2 + x^3yy'' + y\cos x = 1 \tag{5}$$

$$(x\,y')' + e^x y = 0 \tag{6}$$

$$y^3(y')^3 + xy^6 = y \tag{7}$$

حيث $\frac{dy}{dx} = y'$ ، $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ وهكذا.

تعريف (١):

رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة فيها.

وعلى ذلك تكون المعادلات (1)، (3)، (7) من الرتبة الأولى، والمعادلات (2)، (5)، (6) من الرتبة الثانية والمعادلة (4) من الرتبة الثالثة.

تعريف (٢):

درجة المعادلة التفاضلية هي درجة (أس) أعلى مشتقة فيها.

وعلى ذلك فإن المعادلات (1)، (2)، (3)، (4)، (6) من الدرجة الأولى و المعادلة (5)

من الدرجة الثانية والمعادلة (7) من الدرجة الثالثة.

تعريف (٣):

يقال أن المعادلة التفاضلية خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته كمقادير من الدرجة الأولى أي لا يوجد فيها حدود بالصورة ... ,y^2, y^3 أو yy' أو $(y')^2, (y'')^2, ...$ أو $(y''y')$ وهكذا.

وعلى ذلك فإن المعادلات (1)، (2)، (6) معادلا خطية بينما المعادلة (3) غير خطية لاحتوائها على y^2 والمعادلة (4) غير خطية لوجود $(y')^4$ والمعادلة (5) غير خطية لوجود الحد yy'' والمعادلة (7) غير خطية لأكثر من سبب.

وعموماً فإن المعادلة الخطية التي من الرتبة النونية (والدرجة الولى) لها الصورة العامة الآتية:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (8)$$

تعريف (٤):

يقال أن المعادلة التتفاضلية متجانسة إذا كان لا يوجد بها حد (أو أكثر) يحتوي على المتغير المستقل فقط. أما إذا كان بها حد أو أكثر يحتوي على المتغير المستقل فقط فإن المعادلة تكون غير متجانسة.

وعلى ذلك المعادلة (1) غير متجانسة نظراً لوجود x والمعادلة (3) غير متجانسة لاحتوائها على $(x^2 + 1)$ والمعادلة (4) غير متجانسة لاحتوائها $\ln x$ والمعادلة (5) غير متجانسة لاحتوائها على $\cos x$ أما المعادلات (2)، (6)، (7) فهي معادلات متجانسة.

أما المعادلة (8) فتكون متجانسة إذا كانت $f(x) = 0$ وغير متجانسة إذا كانت $f(x) \neq 0$

(١-٣) الحل العام للمعادلة التفاضلية:

نعود الآن إلى المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \qquad (1)$$

نلاحظ أن الدالة $x_1 = 2t$ ومشتقاتها الأولى تحقق المعادلة (1) حسب تعريف الحل. كذلك فإن المعادلة $x_2 = 2t + 1$ ومشتقاتها تحقق المعادلة (1) وعلى ذلك فهي أيضاً حل (مجرد حل) يحقق المعادلة (10) وكذلك $x_3 = 2t - 5$ مجرد حل. وهكذا يوجد عدد لا نهائي من الدوال كل منها مجرد حل. وعموماً فإن:

$$x = 2t + c \qquad (2)$$

(حيث c ثابت اختياري) هي أيضاً حل ولكنه يختلف عن x_1, x_2, x_3 لأنه يمكن الحصول على x_1, x_2, x_3 بوضع $c = 0, c = 1, c = -5$ على الترتيب بينما لا يمكن الحصول على x_1 من x_2 أو x_2 من x_3 وهكذا. لذلك فإن x تسمى بالحل العام للمعادلة (1) وذلك لأنه يمكن الحصول على جميع الحلول الأخرى وذلك باختيار مناسب للثابت c.

تعريف (١):

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو الحل الذي يحتوي على عدد من الثوابت مساوي لرتبة المعادلة.

ويلاحظ أن المعادلة (1) من الرتبة الأولى لذلك فإن (2) هو حلها العام لاحتوائه على ثابت واحد.

ولفهم العلاقة بين الحل العام وبقية الحلول نرسم معادلات الخطوط المستقيمة (المنحنيات) $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ فإن المعادلة (2) هي مجموعة من الخطوط المستقيمة (وذلك بإعطاء قيم مختلفة للثابت c) أما $x_1, x_2, x_3, \ldots$ فإن أي منها يمثل أحد أعضاء تلك المجموعة.

وعموماً فإن الحل العام يمثل عائلة (مجموعة) المنحنيات التي يكون أي من أفرادها محققاً للمعادلة التفاضلية وعند اختيار قيمة عددية للثابت (أو للثوابت) فإننا نقوم باختيار أحد أعضاء تلك العائلة من المنحنيات.

مثال (١):

المعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x \qquad (3)$$

فإن أي من الدوال

$$x_1 = e^t, \qquad x_2 = -5e^t, \qquad x_3 = e^{-t},$$

$$x_4 = 2e^{-t}, \qquad x_5 = c_1e^t, \qquad x_6 = c_2e^{-t}$$

هو مجرد حل للمعادلة (3) بمعنى أن أي منها يحققها مع ملاحظة أن أي منها لا يمثل الحل العام للمعادلة (3)، وذلك لأن أي منها لا يحتوي على ثابتين (حيث أن المعادلة من الرتبة الثانية).

أما الدالة

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t} \qquad (4)$$

حيث c_1, c_2 ثوابت.

فهي حل بالإضافة لاحتوائه على ثابتين وعلى ذلك فإن x هي الحل العام للمعادلة (3). بمعنى أن (4) هي مجموعة المنحنيات التي تمثل الحل العام، أما $x_1, x_2, \ldots, x_6$ فإن أي منها أحد أفراد تلك العائلة ويلاحظ أنه يمكن الحصول على

x_1 من x باختيار $c_1 = 1, c_2 = 0$، x_2 من x باختيار $c_1 = -5, c_2 = 0$

x_3 من x باختيار $c_1 = 0, c_2 = 1$، x_5 من x باختيار $c_2 = 0$ وهكذا.

(١-٤) الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية:

إذا أضفنا إلى المعادلة التفاضلية عدد من الشروط (تسمى الشروط الابتدائية أو الشروط الحدية) مساوي لرتبة المعادلة التفاضلية فإنه يمكن تعيين الثوابت الاختيارية في الحل العام للمعادلة. هذا الحل يسمى بالحل الوحيد للمعادلة لأنه يحقق الشروط الابتدائية (الحدية) المعطاة.

تعريف (١):

الحل الوحيد هو الحل المستنتج من الحل العام بعد تعيين الثوابت فيه (وذلك باستخدام الشروط الحدية أو الابتدائية).

مثال (١):

الحل العام للمعادلة $\dfrac{dx}{dt} = 2$ هو

$$x = 2t + c$$

فإذا $t = 0$ عندما $x = 0$ ويكتب

$$x(0) = 0$$

فإنه بالتعويض عن $x = 0, t = 0$ فإن:

$$0 + 0 + c$$

ومنها

$$c = 0$$

أي أن الحل الوحيد الذي يحقق الشرط المطلوب هو:

$$x = 2t$$

كذلك فإذا أردنا إيجاد الحل الوحيد الذي يحقق

$$x(1) = -7$$

فإنه بالتعويض في الحل العام فإن $c = -5$ وعلى ذلك يكون الحل الوحيد هو:

$$x = 2t - 5$$

مثال (٢):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x$$

حيث

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 1$$

الحــل

نعلم أن الحل العام هو (مثال ص٨)

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

وباستخدام الشروط المعطاة فإن:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1e + c_2e^{-1} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

وهما معادلتان في المجهولين c_1, c_2 بحلهما يكون:

$$c_1 = -c_2 = \frac{e}{e^2 - 1}$$

والحل الوحيد الذي يحقق الشروط المعطاة هو

$$x = \frac{e}{e^2 - 1}\left(e^t - e^{-t}\right)$$

يلاحظ أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية يلزم شرطان لإيجاد الحل الوحيد.

مثال (٣):

أوجد الحل الوحيد في المثال السابق الذي يحقق الشروط

$$x(0) = 0, \qquad x'(0) = 1$$

الحــل

بالتعويض عن $x(0) = 0$ في الحل العام نحصل على

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (*)$$

وبالتعويض عن الشرط $x'(0) = 1$ فإننا نحسب أولاً $\dot{x}$ من الحل العام

$$\dot{x} = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

ومنها

$$1 = c_1 - c_2 \qquad (**)$$

بحل المعادلتين (**), (*) في المجهولين c_1, c_2 نحصل على:

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}$$

وعلى ذلك فإن الحل الوحيد الذي يحقق الشروط هو:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^t - r^{-t}\right)$$

ملاحظة هامة:

عرفنا الحل أو الحلول للمعادلة التفاضلية وذلك على فرض أن للمعادلة التفاضلية حل موجود. وفي الواقع هناك أكثر من نظرية وكل منها بشروط معينة تضمن لنا وجود حل للمعادلة التفاضلية وسوف نتعرض لبعض من هذه النظريات لاحقاً. أما الآن فسوف نقوم بتقسيم المعادلات التفاضلية تبعاً لرتبتها إلى مجموعات وسوف نعطي طريقة أو أكثر لكيفية إيجاد حل أو حلول كل منها.

الباب الثاني
معادلات الرتبة الأولى

هذه المعاملات لها الصورة العامة الآتية:

$$y' = f(x, y)$$

(٢-١) المعاملات القابلة للفصل Separable equations

إذا كانت المعاملات على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}$$

التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\boxed{N(y)dy = M(x)dx}$$

وبذلك أمكن كتابة x, dx في طرف و y, dy في الطرف الآخر وهذه المعادلات يمكن حلها وذلك بتكامل طرفي المعادلة. والأمثلة سوف توضح ذلك.

مثال (١):

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

حيث $y(0) = -1$.

الحــل

حيث أنه أضيف الشرط $y(0) = -1$ لذلك فإن المطلوب هو الحل الوحيد الذي يحقق بالشرط وسوف نحصل أولاً على الحل العام ومنه نوجد الحل الوحيد لذلك نكتب

المعادلة كالآتي:

$$2(y-1)\,dy = (3x^2 + 4x + 2)\,dx$$

وبإجراء تكامل الطرفين فإن:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

حيث c ثابت اختياري وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية. ولإيجاد الحل الوحيد نعوض بالشرط $y(0) = -1$ في الحل العام فإن:

$$1 + 2 = c = 3$$

ويكون الحل الوحيد هو:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

مثال (٢):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x}{1+2y^2}, \qquad y(0) = 1$$

الحــل

بفصل المتغيرات في المعادلة المعطاة يكون:

$$\left(\frac{1+2y^2}{y}\right)dy = \cos x\,dx$$

وبإجراء تكامل الطرفين يكون:

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + c$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة وبالتعويض عن الشرط المطلوب في الحل العام يكون

$$0 + 1 = \sin(0) + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

وعلى ذلك فإن الحل الوحيد هو:

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + 1$$

ملاحظة:

ليس صحيحاً أن كل معادلة قابلة للفصل (يمكن فصلها) والدليل لنعتبر المثال الآتي:

$$y' = \sin(x\,y)$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

(1) $y' = \dfrac{x^2}{y}$

(2) $y' + y^2 \sin x = 0$

(3) $y' = \dfrac{x^2}{y\left(1 + x^3\right)}$

(4) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

(5) $y' = \left(\cos^2 x\right)\left(\cos^2 2y\right)$

(6) $xy' = \sqrt{1 + y^2}$

(7) $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

(8) $y' = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

أوجد الحل الوحيد لكل من المعادلات الآتية:

(9) $\sin(2x)dx + \cos(3y)dy = 0$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$

(10) $xdx + ye^{-x}dy = 0$; $\quad y(0) = 1$

(11) $\dfrac{dr}{d\theta} = r$; $\quad r(0) = 2$

(12) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y + x^2 y};$ $\qquad y(0) = -2$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = xy^3\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$ $\qquad y(0) = 1$

(14) $y' = \dfrac{2x}{1 + 2y};$ $\qquad y(2) = 0$

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(15) $y'\sqrt{1 - x^2}\,dy = \left(\sin^{-1} x\right)dx\ ;$ $\qquad |x| < 1$

(16) $y' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

حيث a, b, c, d ثوابت، $ad - bc \neq 0$

(17) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay + b}{cy + d}$

حيث a, b, c, d ثوابت، $ad - bc \neq 0$

(18) $1 = y\,x^2 y' e^{\left(y + \frac{1}{x}\right)};$ $\qquad x \neq 0$

(٢-٢) معادلات على الصورة

$$\boxed{y' + p(x)y(x) = g(x)} \qquad (1)$$

لإيجاد حل هذه المعادلة (1) سوف نبحث عن دالة ما $\mu(x) > 0$ بحيث إذا ضربنا (1) في

$\mu(x)$ يكون الطرف الأيسر من (1) بالصورة $[\mu(x)y(x)]'$ أي أن:

$$\mu(y' + py) = (\mu y)'$$

$$= \mu y' + \mu' y$$

$$\Rightarrow \qquad \mu(x)\, p(x) = \mu'(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = p(x)dx$$

وبإجراء تكامل الطرفين نحصل على:

$$\ln \mu(x) = \int_0^x p(t)dt$$

ومنها

$$\mu(x) = \exp \int^x p(t)dt \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في $\mu(x)$ حيث نختار $\mu(x)$ كما في (2) فإن:

$$\mu(y' + py) = (\mu y)' = \mu g \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\mu y) = \mu g$$

بضرب الطرفين في dx وبإجراء التكامل يكون:

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[c+\int^{x}\mu(t)g(t)dt\right] \qquad (3)$$

هو الحل العام للمعادلة التفضلية (1) حيث $\mu(x)$ هي كما في (2).

$\mu(x)$ تسمى بمعامل التكامل.

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' - 2xy = x$$

الحــل

في هذه المسألة نجد أن:

$$p(x) = -2x, \quad g(x) = x$$

وعلى ذلك يكون

$$\mu(x)=\exp\int^{x}p(t)dt=\exp\int^{x}-2tdt=\exp\left(-x^{2}\right)=e^{-x^{2}}$$

وعليه يكون

$$y(x)=\frac{1}{\mu(x)}\left[c+\int^{x}te^{-t^{2}}dt\right]$$

$$=e^{x^{2}}\left(c-\frac{1}{2}e^{-x^{2}}\right)$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة.

مثال (٢):

حل المعادلة التفاضلية:

$$(x-2)\frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3; \qquad x \neq 2$$

الحــل

بكتابة المعادلة المعطاة على صورة المعادلة (1) يكون

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{1}{x-2}\right)y = 2(x-2)^2$$

وعلى ذلك يكون:

$$p(x) = \frac{1}{2-x}, \qquad g(x) = 2(x-2)^2$$

باستخدام (2) فإن:

$$\mu(x) = \exp\int^x p(t)dt = \exp\int^x \frac{dt}{2-t} = \exp\left(\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)\right) = \frac{1}{x-2}$$

من (3) فإن:

$$y(x) = (x-2)\left[c + \int^x \frac{2(t-2)^2}{(t-2)}dt\right]$$

$$= (x-2)\left[c + (x-2)^2\right]$$

$$= (x-2)^3 + c(x-2)$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' + y\cot x = 5e^{\cos x}; \qquad x \in (0, \pi)$$

الحــل

$$p(x) = \cot x, \qquad g(x) = 5e^{\cos x}$$

من العلاقة (2)

$$\mu(x) = \exp\int^{x} p(t)dt = \exp\int^{x} \cot t\, dt = \exp(\ln(\sin x)) = \sin x$$

ومن العلاقة (3) فإن الحل العام $y(x)$ يأخذ الصورة:

$$y(x) = \frac{1}{\sin x}\left[c + 5\int^{x} \sin t\, e^{\cos t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left[c - 5e^{\cos x}\right]$$

مثال (٤):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3; \qquad x \neq 0$$

الحــل

بإعادة كتابة المعادلة فإنها تأخذ الصورة:

$$y' + \left(\frac{2-3x^2}{x^3} \right) y = 1$$

وعلى ذلك

$$p(x) = \frac{2-3x^2}{x^3}, \qquad g(x) = 1$$

$$\mu(x) = \exp \int^x p(t)dt = \exp \int^x \left(\frac{2-3t^2}{t^3} \right) dt$$

$$= \exp \int^x \left(2\frac{dt}{t^3} - 3\frac{dt}{t} \right)$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{x^2} + \ln\left(\frac{1}{x^3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام

$$y(x) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left[c + \int^x \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} dt \right]$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left[c + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} x^3 + c x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$$

مثال (٥):

حل المعادلة

$$y' - 2y\cot 2x = 1 - 2x\cot 2x - 2\operatorname{cosec} 2x \,; \quad x \in (0, \pi)$$

الحــل

$$\mu(x) = \exp\int^{x} p(t)dt = \exp\int^{x} -2\cot(2t)dt$$

$$= \exp(-\ln\sin 2x)$$

$$= \operatorname{cosec} 2x$$

وعلى ذلك

$$y(x) = \sin 2x\left\{c + \int^{x} \operatorname{cosec}(2t)[1 - 2t\cot 2t - 2\operatorname{cosec} 2t]dt\right\}$$

$$= \sin(2x)\{c + x\operatorname{cosec}(2x) + \cot(2x)\}$$

$$= c\sin 2x + x + \cos 2x.$$

وهو الحل العام للمعادلة.

(٣-٢) معادلة برنولي Bernoulli Equation

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وهي غير خطية وصورتها كالآتي:

$$\boxed{y' + p(x)y = y^{n}g(x)}$$

حيث n ثابت لا يساوي الواحد الصحيح.

وبإجراء التحويل

$$v(x) = y^{1-n}$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n}\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض عن y' في معادلة برنولي نحصل على:

$$\frac{y^n}{1-n}\frac{dv}{dx} + yp(x) = y^n g(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} + (1-n)v(x)p(x) = (1-n)g(x)$$

وهي معادلة تفاضلية على شكل المعادلة (1) ص١٨ المجهول فيها هو $v(x)$... وبحلها يمكن إيجاد قيمة $v(x)$ وبالتالي $y(x)$.

مثال (١):

حل المعادلة

$$y' - y = xy^5$$

الحــل

هذه المعادلة هي معادلة برنولي حيث $n = 5$ لذلك نفرض أن:

$$v(x) = y^{-4} \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{1}{4}y^5\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية يكون

$$-\frac{1}{4}y^{5}\frac{dv}{dx}-y = xy^{5}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx}+4v=-4x$$

$$\therefore \quad \mu(x)=\exp\int^{x}4dx=e^{4x}$$

$$\therefore \quad v(x)=e^{-4x}\left[c-4\int 4e^{4x}dx\right]$$

$$=e^{-4x}\left[c-xe^{4x}+\frac{1}{4}e^{4x}\right]$$

$$\therefore \quad y(x)=e^{x}\left[c-xe^{4x}+\frac{1}{4}e^{4x}\right]^{-\frac{1}{4}}$$

وهو الحل العام للمعادلة المطلوبة.

مثال (٢):

حل المعادلة

$$y'+2xy=-xy^{4}$$

الحــل

هي معادلة برنولي حيث $n = 4$

نضع

$$v(x) = y^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة فإن:

$$-\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx} + 2xy = -xy^4$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} - 6xv = 3x$$

$$\therefore \quad \mu(x) = \exp \int^x -6x\,dx = \exp\left(-3x^2\right) = e^{-3x^2}$$

$$\therefore \quad v(x) = e^{3x^2}\left[c + 3\int^x xe^{-3x^2}\,dx\right]$$

$$= e^{3x^2}\left[c - \frac{1}{2}e^{-3x^2}\right]$$

$$= ce^{3x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y(x) = \left[ce^{3x^2} - \frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

<u>مثال (٣):</u>

حل المعادلة

$$y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$$

الحــل

هي معادلة برنولي حيث $n = 4$ لذلك نضع

$$v = y^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية

$$\therefore \ -\frac{1}{3} y^4 \frac{dv}{dx} + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3}(1-2x) y^4$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} - v = 2x - 1$$

$$\therefore \ \mu(x) = \exp \int^x - dt = e^{-x}$$

$$\therefore \ v(x) = e^x \left[c + \int^x (2t-1) e^{-t} dt \right]$$

$$= ce^x - 1 - 2x$$

$$\therefore \ y(x) = \left[ce^x - 1 - 2x \right]^{-\frac{1}{3}}$$

مثال (٤):

حل المعادلة:

$$y' - \frac{y}{x} = (1 + \ln x) y^3 ; \qquad x > 0$$

الحــل

هي معادلة برنولي حيث $n = 3$. بوضع

$$v = y^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{1}{2} y^3 \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ -\frac{1}{2} y^3 \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} y = (1 + \ln x) y^3$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} v = 1 + \ln x$$

$$\therefore\ \mu(x) = \exp\left[2\int \frac{dx}{x}\right] = x^2$$

$$\therefore\ v(x) = \frac{1}{x^2}\left[c + \int x^2 (1 + \ln x) dx\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[c - \frac{4}{9} x^3 - \frac{2}{3} x^3 \ln x\right]$$

$$\therefore\ y(x) = \left[\frac{c}{x^2} - \frac{2}{3} x\left(\frac{2}{3} + \ln x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

مثال (٥):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2 y}; \qquad x > 0$$

الحــل

هي معادلة برنولي حيث $n = -1$ لذلك نفرض أن

$$v = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

بالتعويض عن y' في المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{2y}v' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2 y}$$

$$\Rightarrow \qquad v' + \frac{4}{x}v = \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \ \mu(x) = \exp\int\frac{4dx}{x} = x^4$$

$$\therefore \ v(x) = \frac{1}{x^4}\left[c + 2\int x^2 dx\right]$$

$$= \frac{c}{x^4} + \frac{2}{3x}$$

$$\therefore \ y = \sqrt{\frac{c}{x^4} + \frac{2}{3x}}$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(1) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

(2) $y' - 2y = x^2 e^{2x}$

(3) $y' + y = xe^{-x} + 1$

(4) $y' + \frac{1}{x} y = 3\cos 2x;$ $\quad x > 0$

(5) $y' - y = 2e^x$

(6) $xy' + 2y = \sin x;$ $\quad x > 0$

(7) $y' + \frac{1}{x} y = \sin x;$ $\quad x > 0$

(8) $x^2 y' + 3xy = \frac{\sin x}{x};$ $\quad x > 0$

(9) $y' + y\tan x = x\sin 2x;$ $\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(10) $xy' + 2y = e^x;$ $\quad x < 0$

أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(11) $y' - y = 2xe^{2x};$ $\quad y(0) = 1$

(12) $y' + y = \frac{1}{1 + x^2};$ $\quad y(0) = 0$

(13) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x^2};$ $\quad x > 0,\ y(\pi) = 0$

(14) $y' - 2y = e^{2x}$; $y(0) = 2$

(15) $xy' + 2y = \sin x$; $x > 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(16) $xy' + y = e^{x}$; $x > 0, y(1) = 1$

(17) $xy' + 2y = x^2 - x + 1$; $x > 0,\ y(1) = 0$

(18) $y' + y\cot x = 2\operatorname{cosec} x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(19) $y' + 2y = xe^{-2x}$; $y(1) = 0$

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(20) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$; $x > 0$

(21) $y' - y = xy^2$;

(22) $y' + y = y^2e^{x}$

(23) $xy' + y = x^3y^6$; $x > 0$

(24) $yy' - xy^2 + x = 0$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

(25) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^{y} - x}$

(٢٦) نفرض أن $y_1(x)$ هو حل للمعادلة:

$$y' + p(x)\,y = 0 \qquad \text{(i)}$$

ونفرض أن $y_2(x)$ هو حل للمعادلة

$$y' + p(x)\,y = g(x) \qquad \text{(ii)}$$

أثبت أن $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ هي أيضاً حل للمعادلة التفاضلية (ii).

(٢-٤) المعادلات التامة Exact Equation

لنعتبر الدالة

$$\psi(x, y) = c$$

حيث c ثابت

بإجراء التفاضل يكون

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy = 0 \qquad (*)$$

حيث:

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

فإذا كانت لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى (ليست بالضرورة خطية) على الصورة:

$$\boxed{M(x, y) + N(x, y)y' = 0}, \qquad (1)$$

فإنه بمقارنة (1) مع (*) فإن:

$$\psi_x = M(x, y), \qquad \psi_y = N(x, y) \qquad (2)$$

على ذلك تكون الدالة

$$\psi(x, y) = c$$

هي حل للمعادلة التفاضلية (1) وحيث أنها تحتوي على ثابت اختياري c فإنها تكون هي الحل العام للمعادلة.

هذا إذا تحقق الشرط (2)... وإذا كان (2) صحيحاً فإنه بإجراء التفاضل في (2) يكون

$$\psi_{xy} = M_y(x, y), \qquad \psi_{yx} = N_x(x, y)$$

ولكن

$$\psi_{xy} = \psi_{yx}$$

حيث ψ_x, ψ_y دوال متصلة لذلك يجب أن يكون

$$\boxed{M_y(x, y) = N_x(x, y)} \qquad (3)$$

العلاقة (3) هو الشرط الواجب توافره في المعادلة (1) لكي تكون تامة. وإذا تحقق الشرط (3) فإن المعادلة التفاضلية (1) تكون تامة ويكون حلها بالصورة:

$$\psi(x, y) = c$$

لتعيين الدالة $\psi(x, y)$ يجب أن نستخدم (2).

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$$

الحــل

نفرض أن:

$$M = 2xy^3, \qquad N = 3x^2y^2$$

فإن:

$$M_y = 6\,x\,y^2, \qquad N_x = 6\,x\,y^2$$

فنجد أن

$$M_y = N_x$$

أي أن المعادلـة المعطـاة تامـة وذلـك توجـد دالـة $\psi(x, y) = c$ هـي الحـل العـام للمعادلـة التفاضلية حيث أن $\psi(x, y)$ يجب أن تحقق الشرطين في المعادلة (2) أي أن:

$$\psi_x = M(x, y), \qquad \psi_y = N(x, y)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = M = 2xy^3$$

وبإجراء تكامل الطرفين جزئياً بالنسبة إلى x مع ثبوت y فإن:

$$\psi(x, y) = 2y^3 \int x \, dx = y^3 x^2 + \text{ثابت}$$

هذا الثابت قد يكون دالة في y لأن التكامل تم بالنسبة إلى المتغير x مع اعتبار y ثابتة أي يجب أن نختار هذا الثابت على الصورة $h(y)$ وعلى ذلك فإن:

$$\psi(x, y) = x^2 y^3 + h(y)$$

وحيث أن $\psi(x, y)$ يجب أن تحقق المعادلة الثانية من (2) فإن:

$$\psi_y = N$$

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 y^2 + h'(y) = 3x^2 y^2$$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) = c_1$$

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة هو:

$$\psi(x, y) = x^2 y^3 + c_1 = \text{constant.}$$

أي:

$$x^2 y^3 = c$$

<u>مثال (٢):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y^2 \cos x + (1 + 2y \sin x) y' = 0$$

<u>الحــل</u>

لكي نختبر إذا ما كانت المعادلة تامة أم لا نفرض أن:

$$M = y^2 \cos x, \qquad N = 1 + 2y \sin x$$

$$\therefore M_y = 2y \cos x, \qquad N_x = 2y \cos x$$

ويلاحظ أن $M_y = N_x$ أي أن المعادلة تامة لذلك يجب أن تكون هناك دالة ما $\psi(x, y) = c$ هي الحل العام للمعادلة التفاضلية وهذه الدالة $\psi(x, y)$ يجب أن تحقق الشرطين في (2) أي أن:

$$\psi_x = M = y^2 \cos x$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابت فإن

$$\psi = y^2 \int \cos x dx = y^2 \sin x + h(y)$$

وحيث أن ψ يجب أن تحقق الشرط الثاني في (2) فإن:

$$\psi_y = N \qquad \Rightarrow \qquad \psi_y = 2y \sin x + h'(y)$$

$$= 1 + 2y \sin x$$

$$\Rightarrow \qquad h'(y) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = y + c_1$$

وتأخذ ψ الصورة:

$$\psi(x, y) = y^2 \sin x + y + c_1 = \text{constant}$$

$\therefore$ الحل العام هو:

$$y^2 \sin x + y = c$$

<u>مثال (٣):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\left(y \cos x + 2xe^y\right) + \left(\sin x + x^2 e^y + 2\right) y' = 0$$

الحـــل

لنختبر إذا ما كانت الدالة تامة أو غير تامة لذلك نفرض أن:

$$M = y\cos x + 2xe^{y}, \qquad N = \sin x + x^{2}e^{y} + 2$$

بإجراء التفاضل فإن:

$$M_{y} = \cos x + 2xe^{y}, \qquad N_{x} = \cos x + 2xe^{y}$$

ويلاحظ أن:

$$M_y = N_x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو $\psi = c$ حيث:

$$\psi_x = M, \qquad \psi_y = N$$

أي أن:

$$\psi_{x} = y\cos x + 2xe^{y}$$

$$\Rightarrow \qquad \psi(x,y) = y\int \cos x dx + 2e^{y}\int x\, dx$$

$$= y\sin x + x^{2}e^{y} + h(y)$$

ولكن

$$\psi_{y} = \sin x + x^{2}e^{y} + h'(y) = N$$

$$= \sin x + x^{2}e^{y} + 2$$

$$\Rightarrow \qquad h'(y) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = 2y + c_1$$

أي أن الحل العام بالصورة

$$y\sin x + x^{2}e^{y} + 2y = c$$

تمارين

اختبر إذا ما كانت كل من المعادلات الآتية تامة أو غير تامة. وإذا كانت تامة أوجد حلها العام:

(1) $(2x + 3) + (2y - 2)\, y' = 0$

(2) $(2x + 4y) + (2x - 2y)\, y' = 0$

(3) $(9x^2 + y - 1) - (4y - x)\, y' = 0$

(4) $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)\, y' = 0$

(5) $y' = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$

(6) $y' = \dfrac{by - ax}{bx - cy}$

(7) $\left(e^x \sin y - 2y \sin x\right)dx + \left(e^x \cos y + 2\cos x\right)dy = 0$

(8) $\left(e^x \sin y + 3y\right)dx - \left(3x - e^x \sin y\right)dy = 0$

(9) $\left(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x\right)dx + \left(xe^{xy} \cos 2x - 3\right)dy = 0$

(10) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + \left(\ln x - 2\right)dy = 0,\qquad x > 0$

(11) $\left(x \ln y + xy\right)dx + \left(y \ln x + xy\right)dy = 0,\qquad x > 0,\ y > 0$

(12) $\dfrac{xdx}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$

(13) $2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}\, dy = 0$

(14) $\left(4x^3y^3 - 2xy\right)dx + \left(3x^4y^2 - x^2\right)dy = 0$

(15) $\left(\cos y + y\cos x\right)dx + \left(\sin x - x\sin y\right)dy = 0$

(16) $\left(3e^{3x}y - 2x\right)dx + e^{3x}dy = 0$

(17) $\left(6x^5y^3 + 4x^3y^5\right)dx + \left(3x^6y^2 + 5x^4y^4\right)dy = 0$

(18) $\left(x^2 + y^2\right)dx + 2xy = 0$

(٢-٥) معادلات غير تامة ويمكن جعلها تامة:

نفرض أن لدينا المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\boxed{M(x, y) + N(x, y)\, y' = 0} \qquad (1)$$

ونفرض أن هذه المعادلة غير تامة، أي أن:

$$N_x \neq M_y$$

نفرض وجود دالة ما في x فقط مثل $\mu\,(x)$

بضرب طرفي (1) في $\mu\,(x)$ نحصل على:

$$\mu(x)M(x,y) + \mu(x)N(x,y)y' = 0$$

بفرض أن المعادلة الأخيرة أصبحت تامة، فإن:

$$(\mu(x)M)_y = (\mu(x)N)_x$$

$$\Rightarrow \qquad \mu(x)M_y = \frac{d\mu}{dx}N + \mu\, N_x$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu(x)$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu(x)} \qquad (2)$$

فإذا كان فرضنا لوجود دالة $\mu(x)$ كدالة في x فقط صحيحاً فإن الطرف الأيسر من (2) وبالتالي الطرف الأيمن يجب أن يكون دالة في x فقط.

فإذا كان الطرف الأيمن من (2) دالة في (x) فقط فإن $\mu(x)$ موجودة ويمكن إيجادها عن طريق فصل المتغيرات في (2) ثم إجراء تكامل الطرفين. وبذلك نحصل على $\mu(x)$ التي تجعل المعادلة (1) تامة ويمكن معالجتها كالسابق.

مثال (١):

أوجد معامل التكامل $\mu(x)$ لجعل المعادلة الآتية تامة، ثم أوجد حلها العام.

$$\left(3xy+y^2\right)+\left(x^2+xy\right)y'=0$$

الحــل

بحساب M_x, N_y نجد أن:

$$M_x = 3x + 2y, \qquad N_x = 2x + y$$

واضح أن $M_y \neq N_x$ أي أن المعادلة غير تامة لذلك نحسب المعادلة (2).

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{M_y-N_x}{N}\mu=\frac{x+y}{x^2+xy}\mu=\frac{\mu}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu(x)=x$$

أي أنه توجد دالة $\mu(x) = x$ بحيث إذا ضربنا المعادلة التفاضلية في x يمكن جعلها تامة وهو عامل التكامل المطلوب.

بضرب المعادلة المعطاة في x نحصل على:

$$\left(3x^2y+xy^2\right)+\left(x^3+x^2y\right)y'=0$$

وهي معادلة تامة (اختبر ذلك). ولحلها نتبع نفس الخطوات في البند (٢-٣)

$$\psi_x=3x^2y+xy^2, \qquad \psi_y=x^3+x^2y$$

$$\therefore\ \psi=3y\int x^2dx+y^2\int x\,dx$$

$$= yx^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$$\therefore \ \psi_y = x^3 + x^2y + h'(y) = x^3 + x^2y$$

$$\therefore \ h'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = c$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$yx^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

يلاحظ في الطريقة السابقة أنه فرضنا وجود دالة ما $\mu(x)$ كدالة في x فقط وبعد هذا التصور أمكننا إيجاد الشرط (2) في صورة معادلة في x فقط، وهو الشرط الذي يجب أن تحققه μ . فإذا كان الطرف الأيمن من المعادلة (2) دالة في x و y أو y فقط فإنه لا يمكن إيجاد μ كدالة في x. سوف نبين في المثال التالي أنه ليس صحيحاً أن μ موجودة لكل المسائل التي تجعل المعادلة الغير تامة، تامة.

المعادلة

$$\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right) + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)y' = 0$$

هي معادلة غير تامة لأن

$$M_y = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$N_x = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

فإذا حاولنا إيجاد μ كدالة في x فقط نستخدم (2) فإن:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x}$$

الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة لا يمكن جعلها دالة في x فقط وهذا يعني أنه لا يوجد عامل تكامل μ كدالة في x فقط تجعل المعادلة المعطاة تامة لذلك سوف نفكر إذا ما كانت هناك μ كدالة في y فقط بحيث تجعل المعادلة التفاضلية (1) تامة لذلك نفرض وجود μ كدالة في y بحيث تجعل المعادلة (1) تامة.

$$\mu(y)M + \mu(y)N\,y' = 0$$

هي معادلة تامة، لذلك

$$M_y\mu(y) + M\,\frac{d\mu}{dy} = \mu(y)N_x$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M}} \qquad (3)$$

يلاحظ أن الطرف الأيسر في (3) وبالتالي الأيمن يجب أن يكون دالة في y فقط.
فإذا وجد أن الطرف الأيمن من (3) هو دالة في y فقط فهذا يعني أنه توجد دالة μ كدالة في y فقط وعليه يمكن حساب μ وبالتالي جعل المعادلة (1) تامة.
أما إذا كان الأيمن من (2) ليس دالة في x فقط والأيمن من (3) ليس دالة في y فقط فمعنى هذا أن معامل التكامل لتلك المعادلة يجب أن يكون دالة في x, y وفي تلك الحالة فإن التعامل مع المعادلة (2) أو (3) في المتغيرين x, y هي ما يسمى بمعادلة تفاضلية جزئية وهي في الواقع أصعب من المعادلة المعطاة.
بالعودة إلى المثال السابق وتطبيق الشرط (3) فإن:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-4}{y}$$

أي أنها دالة في y فقط وعليه

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{-4}{y}dy$$

$$\Rightarrow \qquad \mu(y)=\exp\int\frac{-4}{y}dy=\exp\left(\ln y^{-4}\right)=\frac{1}{y^4}$$

وبعد ضرب المعادلة المعطاة في $\frac{1}{y^4}$ تصبح تامة وتأخذ الصورة:

$$\left(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)+\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4}\right)y'=0$$

وعلى ذلك

$$\psi_x=2xe^y+2\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^3}$$

$$\psi_y=x^2e^y-\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{3x}{y^4}$$

$$\therefore\ \psi=e^y\int 2xdx+\frac{2}{y}\int xdx+\frac{1}{y^3}\int dx$$

$$=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+h(y)$$

وعلى ذلك يكون

$$\psi_y=x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}+h'(y)$$

$$= x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}$$

$$\therefore\ h'(y) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = c_1$$

$$\psi = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + c_1 = c_0 = \text{constant}$$

ويكون الحل العام هو:

$$x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

مما سبق ومن الصيغ (3) ,(2) نجد أن هناك معادلات تفاضلية على الصورة:

$$M + N\,y' = 0$$

وهي معادلات غير تامة ولكن يوجد في بعض المسائل دالة μ قد تكون دالة في x فقط أو قد تكون دالة في y فقط أو دالة في المتغيرين x, y (ونحن لا نعلم أي من الحالات الثلاث لدينا). لذلك نسحب الكميتين الآتيتين:

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$ (ويجب أن تكون دالة في x فقط)

$$\frac{N_x - M_y}{M}$$ (ويجب أن تكون دالة في y فقط)

فإذا كانت المسألة إحداهما أو كلاهما نستعمل الصيغ (2) أو (3) لإيجاد μ وجعل المعادلة تامة. أما إذا كانت لا الكمية الأولى دالة في x ولا الكمية الثانية دالة في y فقط فمعنى هذا أنه لا توجد μ كدالة في متغير واحد لجعل المعادلة تامة.

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)dx+2\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0$$

الحـل

$$M_y=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2$$

$$N_x=2(2xy+1)$$

وعلى ذلك فإن المعادلة المعطاة غير تامة

$$M_y-N_x=4x^3y+4x^2+4xy^3$$

وواضح أن

$$\frac{M_y-N_x}{N}=2x$$

بينما $\dfrac{N_x-M_y}{M}$ ليست دالة في y فقط لذلك تكون μ دالة في x فقط وعلى ذلك نستخدم (2) لنحصل على:

$$\frac{d\mu}{dx}=2x\mu \quad\Rightarrow\quad \mu=e^{x^2}$$

بضرب طرفي المعادلة المعطاة في e^{x^2} تصبح تامة وتأخذ الصورة:

$$\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)e^{x^2}+2\left(y^3+x^2y+x\right)e^{x^2}y'=0$$

$$\Rightarrow\qquad \psi_x=\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)e^{x^2}$$

$$\psi_y=2\left(y^3+x^2y+x\right)e^{x^2}$$

وواضح أن تكامل ψ_y جزئياً بالنسبة لـ y أسهل من تكامل ψ_x بالنسبة إلى x لذلك نكامل ψ_y لنحصل على:

$$\psi = 2e^{x^2}\int y^3 dy + 2x^2 e^{x^2}\int y\, dy + 2xe^{x^2}\int dy$$

$$= \frac{1}{2}y^4 e^{x^2} + x^2 y^2 e^{x^2} + k(x)$$

$$\psi_x = \left(xy^4 + 2xy^2 + 2x^3 y^2 + 2y + 4x^2\right)e^{x^2} + k'(x)$$

وبمقارنة هذا بـ ψ_x التي حصلنا عليها سابقاً، فإن:

$$k'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k(x) = c_1$$

والحل العام للمعادلة هو:

$$\left(\frac{1}{2}y^4 + x^2 y^2 + 2xy\right)e^{x^2} = c$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

(1) $ydx+\left(2x-ye^{y}\right)dy=0;\qquad (\mu=y)$

(2) $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)+\left(x^2+y^2\right)y'=0$

(3) $y'=e^{2x}+y-1$

(4) $ydx+\left(y^2-x\right)dy=0$

(5) $dx+\left(\dfrac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$

(6) $ydx+\left(2xy-e^{-xy}\right)dy=0$

(7) $e^{x}dx+\left(e^{x}\cot y+2y\operatorname{cosec} y\right)dy=0$

(8) $\left(2xy^4e^{y}+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^{y}-x^2y^2-3x\right)dy=0$

(9) $\left(y+1-x^2\right)-xy'=0$

(10) $y+\left(y^2-x\right)y'=0$

(11) $\left(2y-3x\right)dx+xdy=0$

(12) $\left(x-y^2\right)dx+2xydy=0$

(13) $\left(y+\ln x\right)dx-xdy=0$

(14) $\left(3x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$

(15) $\dfrac{y}{x^3}dx+\dfrac{1}{x^2}\left(x^2y-1\right)dy=0$

(16) $\left(2xe^{x-y}+2\dfrac{x}{y}+3x^2ye^{-y}\right)+\left(\dfrac{1}{y}e^{x^2-y}+\dfrac{x^2}{y}+2x^3e^{-y}\right)y'=0$

(17) $(\sin xy+xy\cos xy)+\left(\dfrac{x}{y}\sin xy+x^2\cos xy\right)y'=0$

(18) $3e^x+xe^x+\dfrac{2}{x}e^y+\dfrac{2y^2}{x}+(e^y+2y)y'=0$

(19) $e^{y^2}(1+x^2+y^2)+\dfrac{1}{x}e^{y^2}(x^2y+y+y^3)y'=0$

(20) $\left(\dfrac{y}{x}\cos xy-y^2\sin xy\right)+(\cos xy-xy\sin xy)y'=0$

(21) $\left(3y^3+2\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{y}{x^2}\right)+\left(3xy^2+2y+\dfrac{1}{x}\right)y'=0$

(22) $(4x^3y^2+2x^2y+2x)+\left(4x^4y+3x^3+\dfrac{2x^2}{y}\right)y'=0$

(23) $\left(y^2-\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)+\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}+xy\right)y'=0$

(24) $\dfrac{2x}{y}e^{x^2}+e^{xy-y^2}+\left(2e^{x^2}+\dfrac{x}{y}e^{xy-y^2}\right)y'=0$

(٢-٥) معادلات على الصورة:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ومن أمثلة هذا النوع من المسائل

$$(1)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x^2}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

أي أنها معادلات طرفها الأيمن دالة في $\left(\frac{y}{x}\right)$ فقط وليست كل المعادلات القابلة للكتابة على تلك الصورة فمثلاً:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{x^2+y^2}=\frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ويلاحظ أن وجود الحد $\left(\frac{1}{x^2}\right)$ يجعل الأيمن ليس على الصورة $F\left(\frac{y}{x}\right)$.

نعود الآن ونفرض أن المعادلة على الصورة:

$$y'=F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

في هذه الحالة نستخدم التعويض

$$v = \frac{y}{x}$$

وعلى ذلك

$$y = v\,x$$

$$\therefore\ \ y' = v + x\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}$$

وبإجراء تكامل الطرفين (حيث أمكن فصل متغيراتها) يمكن الحصول على v كدالة في x ومنها يمكن إيجاد y كدالة في x بعد التعويض عن v.

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

الحــل

نفرض أن $v=\dfrac{y}{x}$ ومنها $y'=v+x\dfrac{dv}{dx}$ بالتعويض في المعادلة فإن:

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1}$$

$$=v^2+2v$$

$$x\frac{dv}{dx}=v^2+v$$

$$\therefore\ \frac{dx}{x}=\frac{dv}{v(v+1)}=\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v+1}\right)dv$$

وبإجراء تكامل الطرفين، نحصل على:

$$\ln x=\ln v-\ln(v+1)+\ln c$$

$$\ln x=\ln\frac{cv}{v+1}$$

$$\therefore\ \frac{cv}{v+1}=x$$

$$\therefore\ \frac{c\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{y}{x}\right)+1}=x$$

$$\therefore\ cy=x(y+x)$$

$$y=\frac{x^2}{c-x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (٢):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 + y^2}$$

الذي يحقق $y(0) = 1$

الحـل

لنبحث أولاً عن الحل العام

واضح أن:

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

بوضع $v = \frac{y}{x} \quad \Leftarrow \quad y = v\,x$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

بالتعويض عن المعادلة التفاضلية نحصل على

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v^2}{1 + v^2}$$

$$\therefore\ \ x\frac{dv}{dx}=\frac{v-v^2}{1+v^2}-v=\frac{-\left(v^2+v^3\right)}{1+v^2}$$

$$\therefore\ \ \frac{1+v^2}{v^2(1+v)}dv=-\frac{dx}{x}$$

$$\therefore\ \ \left(-\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{2}{1+v}\right)dv=-\frac{dx}{x}$$

وبإجراء تكامل الطرفين، يكون:

$$-\ln v-\frac{1}{v}+2\ln(1+v)=-\ln x+\ln c$$

$$\ln\frac{x(v+1)^2}{v}=\frac{1}{v}-\ln c$$

$$\frac{x(1+v)^2c}{v}=e^{\frac{1}{v}}$$

$$\therefore\ \ \frac{c(x+y)^2}{y}=e^{\frac{x}{y}}$$

وهو الحل العام للمعادلة. بالتعويض بالشرط $y(0)=1$ نجد أن:

$$c=e^0=1$$

$\therefore$ الحل الوحيد بالصورة

$$(x+y)^2=ye^{\left(\frac{x}{y}\right)}$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

(1) $y' = \dfrac{x+y}{x}$

(2) $2ydx - xdy = 0$

(3) $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

(4) $y' = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

(5) $y' = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$

(6) $y' = \dfrac{x+3y}{2x+y}$

(7) $y' = \dfrac{2y-x}{2x-y}$

(8) $y' = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$

(9) $y' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$

(10) $y' = \dfrac{4x+3y+15}{2x+y+7}$

(٢-٦) معادلات من الرتبة الأولى والدرجات العليا:

إذا وضعنا $p = \frac{dy}{dx}$ وذلك للسهولة فقط، فإن هذه المعادلات تأخذ الصورة:

$$\boxed{p^n + B_1(x,y)p^{n-1} + ... + B_{n-1}(x,y)p + B_n(x,y) = 0} \qquad (1)$$

أولاً:

إذا أمكن تحليل الطرف الأيسر من (1) أي كتابته على الصورة

$$(p - F_1)(p - F_2)\ \dots\ (p - F_n) = 0$$

حيث:

$$F_i = F_i(x, y)$$

ومنها نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = F_1,\ \ \frac{dy}{dx} = F_2,\ \dots,\ \frac{dy}{dx} = F_n$$

وبإجراء تكامل كل من هذه المعادلات مع وضع ثابت واحد في كل منها نحصل على:

$$f_1(x, y, c) = 0,\ \ f_2(x, y, c) = 0,\ \dots,\ f_n(x, y, c) = 0$$

يلاحظ أن أي من $f_i(x, y, c) = 0$ يحقق المعادلة التفاضلية، ولكن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$f_1\ .\ f_2\ \dots\ f_n = 0$$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(p - 1)(p - x)(p - 2y) = 0$$

الحــل

$$p = 1,\ \ p = x,\ \ p = 2y$$

منها

$$y - x - c = 0$$

$$xy - x^{2} - c = 0$$

$$y - ce^{2x} = 0$$

وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة بالصورة:

$$\left(y - x - c\right)\left(2y - x^{2} - c\right)\left(y - ce^{2x}\right) = 0$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$p^{2} - 2p\sinh x - 1 = 0$$

الحــل

$$p^{2} - \left(e^{x} - e^{-x}\right)p - 1 = 0$$

$$\therefore\ \left(p - e^{x}\right)\left(p + e^{-x}\right) = 0$$

ومنها

$$p - e^{x} = 0, \qquad p + e^{-x} = 0$$

$$y - e^{x} + c = 0, \qquad y - e^{-x} + c = 0$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$\left(y - e^{x} + c\right)\left(y - e^{-x} + c\right) = 0$$

مثال (٣):

أوجد حل المعادلة:

$$xyp^2+\left(x^2+xy+y^2\right)p+x^2+xy=0$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلة على الصورة:

$$(xp+x+y)(yp+x)=0$$

ومنها

$$x\frac{dy}{dx}+x+y=0, \qquad y\frac{dy}{dx}+x=0$$

وحل الأولى هي

$$y^2+x^2-c=0 \qquad (*)$$

والأخرى تأخذ الصورة

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=-1$$

وهي معادلة خطية حلها بالصورة

$$2xy+x^2-c=0 \qquad (**)$$

من (*) و (**) يكون الحل العام بالصورة:

$$(2xy+x^2-c)\,(x^2+y^2-c)=0$$

مثال (٤):

أوجد حل المعادلة:

$$\left(x^2+x\right)p^2+\left(x^2+x-2xy-y\right)p+y^2-xy=0$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلة على الصورة:

$$[(x+1)p-y]\,[xp+x-y]=0$$

ومنها

$$x\frac{dy}{dx}+x-y=0 \qquad \text{أو} \qquad (x+1)\frac{dy}{dx}-y=0$$

وحلها على الصورة:

$$y+x\ln(cx)=0 \qquad \text{و} \qquad y-c(x+1)=0$$

والحل العام بالصورة:

$$[y+x\ln(cx)]\,[y-c(x+1)]=0$$

ثانيا:

إذا أمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$y=B(x,p) \tag{2}$$

بإجراء تفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى x يكون

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$\phi\left(\frac{dp}{dx},p,x\right)=0 \tag{3}$$

بحلها يمكن الحصول على p كدالة في x ثم بحذف p من (2) وحل (3)، إن أمكن نحصل

على y كدالة في x.

مثال (٥):

أوجد حل المعادلة:

$$16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0 \qquad (1)$$

الحـل

نكتب المعادلة بالصورة:

$$2y = px - 16\frac{x^2}{p^2}$$

بإجراء التفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$2p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{32x}{p^2} + \frac{32x^2}{p^3}\frac{dp}{dx}$$

ومنها

$$x\left(p^3 + 32x\right)\frac{dp}{dx} - p\left(p^3 + 32x\right) = 0$$

$$\left(p^3 + 32x\right)\left(x\frac{dp}{dx} - p\right) = 0$$

وعلى ذلك فإن:

$$p^3 + 32x = 0 \qquad \text{أو} \qquad x\frac{dp}{dx} - p = 0$$

فإذا اعتبرنا أن المعادلة التي تحتوي على تفاضل p مع إهمال المعادلة التي لا تحتوي على تفاضل p (راجع المحاضرة)

$$x\frac{dp}{dx} - p = 0$$

$$\therefore \ \frac{dp}{p} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\therefore \ p = cx$$

بالتعويض عن p في المعادلة المعطاة نحصل على:

$$2y = cx^2 - 16\frac{x^2}{c^2x^2}$$

$$2c^2y = c^3x^2 - 16 \qquad (2)$$

المعادلة (2) هي الحل العام للمعادلة (1) وذلك لاحتوائه على ثابت c. وإذا أعطينا شرط ابتدائي يمكن حساب قيمة c وبذلك نحصل على الحل الوحيد الذي يحقق ذلك الشرط.

نعود الآن للمعادلة التي تركناها عند التحليل وهي

$$p^3 + 32\,x = 0$$

ومنها فإن:

$$p = -2(4x)^{1/3} \qquad (3)$$

وبالتعويض عن قيمة p من (3) في المعادلة المعطاة (1) نحصل على:

$$16x^2 + 2y\left[4(4x)^{2/3}\right] - x(-8)(4x) = 0$$

ومنها يكون

$$48x^2 + 16\sqrt[3]{2}\,yx^{2/3} = 0$$

$$\therefore \ y = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}x^{4/3} \qquad (4)$$

لاحظ أنه إذا حسبنا p والتي هي $\frac{dy}{dx}$ من العلاقة (4) فسوف نحصل على العلاقة (3) (تأكد من ذلك).

لاحظ أن y التي من (4) وكذلك قيمة p التي من (3) تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة (1) وعلى ذلك فهي حل للمعادلة التفاضلية المعطاة. وحيث أنها لا تحتوي على ثابت c فهي ليست الحل العام للمعادلة. هذا الحل (4) يسمى الحل المفرد للمعادلة أو الحل الشاذ للمعادلة (singular solution).

هذا الحل لا يظهر إلا في المعادلات الغير خطية فقط.

مثال (٦):

أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة

$$y = 2px + p^4x^2$$

وكذلك الحل الوحيد الذي يحقق $y(0) = 1$

الحـل

بتفاضل طرفي المعادلة المعطاة بالنسبة إلى x يكون

$$p = 2x\frac{dp}{dx} + 2p + 2xp^4 + 4x^2p^3\frac{dp}{dx}$$

أو

$$\left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)\left(1 + 2xp^3\right) = 0$$

ومنها

$$1 + 2xp^3 = 0 \qquad (1)$$

أو

$$p + 2x\frac{dp}{dx} = 0 \qquad (2)$$

ولإيجاد الحل العام نأخذ في الاعتبار المعادلة (2) وبتكاملها نحصل على

$$xp^2 = c$$

$$\therefore \; p^2 = \frac{c}{x} \qquad (3)$$

وبحذف p من (3) والمعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على الحل العام كالآتي:

المعادلة المعطاة يمكن كتابتها كالآتي:

$$2px = y - p^4x^2$$

أو

$$4p^2x^2 = \left(y - p^4x^2\right)^2$$

ومن (3) يكون

$$4cx = \left(y - c^2\right)^2 \qquad (4)$$

وذلك هو الحل العام نظراً لاحتوائه على c. ولإيجاد الحل الوحيد الذي يحقق الشرط

$$y(0) = 1$$

نعوض في (4) فنحصل على

$$0 = \left(1 - c^2\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \pm 1$$

والحل الوحيد يأخذ الصورة:

$$\pm 4x = \left(y \mp c^2\right)^2$$

ولإيجاد الحل المفرد نعود إلى العلاقة (1) التي على الصورة:

$$1 + 2xp^3 = 0$$

ومنها

$$p = -\sqrt[3]{\frac{1}{2x}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$$

وبالتعويض عن قيمة p في المعادلة المعطاة نحصل على

$$y = 2x\left[\frac{-1}{(2x)^{1/3}}\right] + \frac{x^2}{(2x)^{2/3}}$$

$$= \left(2^{2/3} + \frac{1}{2^{4/3}}\right)x^{2/3} = \frac{5}{2^{4/3}}x^{2/3}$$

<u>ثالثا:</u>

إذا كانت المعادلة المعطاة على الصورة:

$$x = B(y, p)$$

فإنه بإجراء التفاضل بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\phi\left(\frac{dp}{dy}, p, y\right) = 0$$

وبحل المعادلة التفاضلية بمكن الحصول على

$$p = p(y, c)$$

هذه العلاقة مع المعادلة التفاضلية المعطاة يسميان المعادلتان البارامتريتان للحل العام وبحذف p من أحدهما (إن أمكن) يمكن الحصول على

$$y = y(x, c)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال (٧):

أوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة:

$$y = 3px + 6y^2 p^2 \qquad (1)$$

الحـل

نكتب المعادلة (1) على الصورة:

$$3x = \frac{y}{p} - 6py^2$$

وبإجراء تفاضل الطرفين بالنسبة إلى y نحصل على:

$$\frac{3}{p} = \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py$$

ومنها

$$\left(1 + 6p^2 y\right)\left(2p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + 6p^2 y = 0 \qquad (1)$$

أو

$$2p + y\frac{dp}{dy} = 0 \qquad (2)$$

وبتكامل المعادلة (2) نحصل على:

$$py^2 = c \qquad (3)$$

المعادلة (3) مع المعادلة التفاضلية المعطاة هما المعادلتان البارمتريتان (البارمتر p) للحل العام. بإيجاد p من (3) والتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة يكون

$$p = \frac{c}{y^2}$$

$$\therefore \quad y = 3x\left(\frac{c}{y^2}\right) + 6y^2\left(\frac{c^2}{y^4}\right)$$

$$\therefore \quad y^3 = 3cx + 6c^2$$

الحل العام.

لإيجاد الحل المفرد نعود للعلاقة (1)

$$1 + 6yp^2 = 0$$

$$\therefore \quad p = \sqrt{\frac{-1}{6y}} = \frac{1}{\sqrt{-6y}}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة يكون:

$$y = 3x\frac{1}{\sqrt{-6y}} + 6y^2\left(\frac{1}{-6y}\right)$$

$$= x\sqrt{\frac{3}{-2y}} - y$$

$$\therefore \quad 2y = x\sqrt{\frac{-3}{2y}}$$

$$\therefore\ \ x = 2y\sqrt{\frac{-2y}{3}}$$

مثال (٨):

أوجد الحل العام للمعادلة والحل المفرد للمعادلة:

$$p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$$

الحـل

نكتب المعادلة على الصورة:

$$2x = \frac{p^2}{y} + \frac{4y}{p}$$

بإجراء التفاضل بالنسبة إلى y يكون

$$\frac{2}{p} = \frac{2p}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} + 4\left(\frac{1}{p} - \frac{4}{p^2}\frac{dp}{dy}\right)$$

$$\therefore\ \ \left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right)\left(2y^2 - p^3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 2y^2 - p^3 = 0 \qquad (1)$$

$$p - 2y\frac{dp}{dy} = 0 \qquad (2)$$

بتكامل (2) نحصل على:

$$p^2 = cy$$

بتربيع المعادلة المعطاة لتسهيل التعويض يكون

$$p^2\left(p^2-2xy\right)^2=16y^4$$

بالتعويض عن p^2 يكون

$$cy(cy-2xy)^2=16y^4$$

$$\therefore\ c(c-2x)^2=16y$$

وهو الحل العام

للحصول على الحل المفرد من (1) فإن

$$p=\sqrt[3]{2y^2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$3\sqrt[3]{\frac{y}{2}}=x$$

$$\therefore\ y=2\left(\frac{x}{3}\right)^3$$

تمارين

أوجد الحل العام والحل المفرد لكل مما يأتي:

(1) $4x = py\left(p^2 - 3\right)$

(2) $x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

(3) $xp^2 + \left(y - 1 - x^2\right)p - x\left(y - 1\right) = 0$

(4) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

(5) $8yp^2 - 2xp + y = 0$

(6) $xp^2 - yp - y = 0$

(7) $p^2 - xp - y = 0$

(8) $yp^2 - xp + 3y = 0$

(9) $y^2 p^2 + 3px - y = 0$

(10) $3x^4 p^2 - xp - y = 0$

تمارين عامة على الباب الثاني

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية:

(1) $y' = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$

(2) $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

(3) $y' = \dfrac{2x+y}{3+3y^2-x}$; $y(0) = 0$

(4) $(x+e^y)dy - dx = 0$

(5) $y' = \dfrac{1-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

(6) $xy' + xy = 1 - y$; $y(1) = 0$

(7) $y' = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ (let $u = x^2$)

(8) $xy' + 2y = \dfrac{\sin x}{x}$; $y(2) = 1$

(9) $y' = -\dfrac{1+2xy}{x^2+2y}$

(10) $(3y^2 + 2xy)dx - (2xy + x^2)dy = 0$

(11) $(x^2 + y)dx + (x + e^y)dy = 0$

(12) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

(13) $xdy - ydx = \sqrt{xy}\,dx$

(14) $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0,\qquad y(2) = 3$

(15) $(1 + e^x)y' = y - ye^x$

(16) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

(17) $y' = 3y + e^{2x}$

(18) $(2y + 3x)dx = -x\,dy$

(19) $xdy - ydx = 2x^2y^2dy;\qquad y(1) = 0$

(20) $y' = e^{x+y}$

(21) $xy' = y + xe^{\left(\frac{y}{x}\right)}$

(22) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}$

(23) $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$

(24) $2\sin x \cos x\,dx + \cos y \sin x\,dy = 0$

(25) $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

(26) $(2y + 1)dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right)dy = 0$

(27) $(\cos 2y - \sin x)dx - 2\tan x \sin 2y\,dy = 0$

(28) $y' = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

(29) $y' = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

(30) $y' = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}$; $y(0) = 1$

(31) $(x^2y + xy - y)dx + (x^2y - 2x^2)dy = 0$

(32) $y' = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^2 + 3xy}$; $y(1) = -2$

(33) $y = 3px + 6p^2y^2$

(34) $y = (2 + p)x + p^2$

(35) $8yp^2 - 2xy + y = 0$

الباب الثالث
معادلات الرتبة الثانية

(٣-١) الصورة العامة لمعادلات الرتبة الثانية الخطية هي:

$$y''(x)=f\left(y(x),y'(x);x\right) \qquad (1)$$

كما عرفنا سابقاً من الباب الثاني، فإن معادلات الرتبة الأولى ويلزمها شرط ابتدائي واحد. كذلك فإن معادلات الرتبة الثانية يلزمها شرطان ابتدائيان وذلك لإيجاد الحل الوحيد (إن وجد). أما الحل العام لمعادلات الرتبة الثانية يحتوي على ثابتين (بدلاً من ثابت واحد في حالة الرتبة الأولى).

نظرية (١):

إذا كانت الدوال $f\left(y,y',x\right), \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}$ دوال متصلة بالنسبة للمتغيرات الثلاثة x, y, y' في المنطقة R (ذو ثلاث أبعاد x, y, y') وكانت النقطة $\left(x_0,y_0,y'_0\right)$ نقطة داخلية داخل المنطقة R فإنه يوجد حل وحيد $y=y(x)$ للمعادلة التفاضلية (1) يحقق الشرطان الآتيان:

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0 \qquad (2)$$

وذلك في منطقة ما حول النقطة x_0.

وعلى الرغم من أن المعادلة التفاضلية (1) تبدو بسيطة ورغم التأكد من وجود الحل الوحيد (باستخدام النظرية (1)) إلا أنه لا توجد طريقة عامة لحل المعادلة (1)و (2) إلا إذا كانت f تأخذ صوراً مبسطة ومن هذه الصور:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=g(x) \qquad (3)$$

حيث $p(x), q(x), g(x)$ دوال متصلة بالإضافة للشرطان

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \qquad (4)$$

المسألة (4) ,(3) تحقق شروط النظرية (1) وعلى ذلك فإن المعادلة (3) مع الشرطان (4) لهما حل وحيد طبقاً للنظرية (1) ولبيان ذلك فإن:

$$f(x, y, y') = -p(x)y(x) - q(x)y'(x) + g(x)$$

ويلاحظ أن f متصلة طالما كانت p, q, g متصلة.

كذلك فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -q(x)$$

وهي متصلة لأن $q(x)$ متصلة

أيضاً:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -p(x)$$

وهي متصلة لأن $p(x)$ متصلة.

أي أن $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ دوال متصلة. أي أن الصورة (3) تحقق شروط النظرية (1) وإذا أضفنا الشرطان (4) فإن المسألة (4) ,(3) يكون لها حل وحيد في مدى (فترة ما) حول النقطة x_0.

(٣-٢) اختزال الرتبة:

أولاً: إذا كانت المعادلة في الصورة:

$$y'' = f(x, y') \qquad (1)$$

فإن التعويض $v = y'$ يؤدي إلى أن:

$$y'' = v'$$

بالتعويض في (1) يكون:

$$\frac{dv}{dx} = f(x,v) \qquad (2)$$

معادلة (1) هي معادلة من الرتبة الأولى في المتغير التابع v والمتغير المستقل x. يمكن حلها بإحدى الطرق المبينة في الباب الثاني وإيجاد $v = v(x)$ وبإجراء تكامل $\frac{dy}{dx} = v = v(x)$ المعادلة الأخيرة بعد فصل المتغيرات يمكن إيجاد y كدالة في x.

<u>مثال (١):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0\,; \qquad x > 0$$

<u>الحـل</u>

يمكن كتابة المعادلة على الصورة:

$$y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} y'$$

وهي على شكل المعادلة (1)، لذلك نضع $v = y'$

فإن

$$v' = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} v$$

$$\therefore \ \frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=\frac{1}{x^2}$$

$$\mu(x)=\exp\int\frac{2dx}{x}=\exp\left(\ln x^2\right)=x^2$$

$$v(x)=\frac{1}{x^2}\{c_1+\int dx\}=\frac{1}{x^2}\{c_1+x\}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

بإجراء التكامل يكون

$$y=-\frac{c_1}{x}+\ln x+c_2$$

وهو الحل العام للمعادلة (انظر لاحتوائه على ثابتين).

<u>مثال (٢):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''+x(y')^2=0$$

<u>الحـل</u>

$$y''=-x(y')^2$$

وهي معادلة على شكل (1) بوضع $v=y'$ فإن:

$$\frac{dv}{dx}=-xv^2$$

$$\therefore \ -\frac{dv}{v^2}=xdx$$

$$\therefore\ \frac{1}{v}=\frac{x^2}{2}+c_1=\frac{x^2+c_1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2+c_1}$$

$$\therefore\ dy=2\frac{dx}{x^2+c_1}$$

وبإجراء تكامل للطرفين يكون:

$$y=c_2+\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{c_1}}\tanh^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{c_1}} & if\ \ c_1>0\\[2ex] -\dfrac{2}{x} & if\ \ c_1=0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-c_1}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{-c_1}}{x+\sqrt{-c_1}}\right| & if\ \ c_1<0\end{cases}$$

<u>ثانياً :</u> إذا كانت المعادلة على الصورة:

$$y''=f(y,y') \qquad (3)$$

فإن التعويض $v=y'$ يعطي

$$\frac{dv}{dx}=f(y,v)$$

وهذه المعادلة تحتوي على ثلاث متغيرات x, y, v ولكن التحويلة

$$y''=\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy}$$

بالتعويض في (3) يكون:

$$v\frac{dv}{dy} = f\left(y,v\right)$$

وهي معادلة من الرتبة الأولى يمكن حلها وإيجاد

$$v = v(y)$$

وبالتالي يمكن حل $\frac{dv}{dx} = v\left(y\right)$ بفصل المتغيرات وإيجاد y كدالة في x.

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y\,y'' + \left(y'\right)^2 = 0$$

الحـل

نكتب المعادلة بالصورة:

$$y'' = -\frac{\left(y'\right)^2}{y} \qquad\qquad y \neq 0$$

وهي على شكل المعادلة (3) لذلك نفرض أن $v = y'$

$$\therefore\ \ y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

$$\therefore\ \ v\frac{dv}{dy} = -\frac{v^2}{y}$$

$$\therefore\ \ \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$$

حيث $v \neq 0$ وبإجراء التكامل

$$\ln v + \ln y = \ln c \quad \Rightarrow \quad vy = c$$

$$\therefore\ y\frac{dy}{dx} = c \quad \Rightarrow \quad y^2 = c_1 x + c_2$$

مثال (٤):

أوجد حل المعادلة:

$$y'' + y(y')^3 = 0$$

الحـل

نكتب المعادلة على شكل (3)

$$y'' = -y(y')^3$$

نضع $y' = v$

$$\therefore\ y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة

$$\therefore\ v\frac{dv}{dy} = -yv^3$$

$$\therefore\ -\frac{dv}{v^2} = ydy$$ (حيث $v \neq 0$)

$$\therefore\ \frac{1}{v} = \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{y^2 + c_1}{2}$$

$$\therefore\ v = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2 + c_1}$$

$$\therefore\ (y^2 + c_1)dy = 2dx$$

$$\therefore\ \frac{1}{3}y^3 + c_1 y = 2x + c_2$$

تمارين

أوجد حل كل مما يأتي:

(1) $xy'' + y' = 1;$ $\quad x > 0$

(2) $2x^2 y'' + (y')^3 = 2xy';$ $\quad x > 0$

(3) $y'' + y = 0$

(4) $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$

(5) $yy'' = 2;$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

(6) $y'' - 3y^2 = 0;$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

(7) $y'y'' - x = 0;$ $\quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1$

(8) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \dfrac{3}{x^2} = 0;$ $\quad x > 0$

(٣-٣) الحلول الأساسية للمعادلات المتجانسة:

لنعتبر المعادلة التفاضلية

$$L[y(x)] = \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

حيث $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة $\alpha < x < \beta$ والمؤثر $L[y(x)]$ يعرف كالآتي:

$$L\left[y(x)\right] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right]y(x)$$

فمثلاً:

$$L\left[x^2\right] = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x)\right]x^2$$

$$= 2 + 2x\,p(x) + x^2q(x)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة (1) باستخدام المؤثر $L[.]$ كالآتي:

$$L[y(x)] = 0 \qquad (1)$$

نظرية (١):

إذا كانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن التعبير الخطي

$$c_1\,y_1 + c_2\,y_2$$

هو أيضاً حل للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثوابت.

البرهان:

بما أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإن

$$L[y_1(x)] = 0, \qquad L[y_2(x)] = 0$$

الأيسر من $(1) = L[c_1 y_1 + c_2 y_2]$

$$= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

الأيمن من $= c_1(0) + c_2(0) = 0 = (1)$

أي أن $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ هو حل للمعادلة (1). وهو المطلوب.

نظرية (٢):

إذا كانت $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة $\alpha < x < \beta$ وكانت $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) بحيث أن:

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0, \qquad \forall\ x \in (\alpha, \beta) \qquad (2)$$

فإن التعبير

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

هو الحل العام للمعادلة (1) حيث c_1, c_2 ثوابت.

ملحوظة:

يلاحظ أن الشرط (2) هو:

$$W\ (y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

وسوف نسمي هذا المحدد بـ Wronskian نسبة إلى العالم البولندي Wronski ويرمز له بالرمز

$$W(x) = W(y_1, y_2)$$

نظرية (٣):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) وإذا كانت $y_1(x)$, $y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) فإنه إما أن

$$W(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in (\alpha, \beta)$$

أو $W(x) \neq 0$ **وذلك لأي نقطة x داخل الفترة (α, β).**

بمعنى أنه لا توجد نقطة x داخل الفترة (α, β) تتلاشى عندها W.

البرهان:

حيث أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان للمعادلة (1) إذن

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

بضرب الأولى في y_2 - والثانية في y_1 والجمع يكون

$$\left(y_1 y_2'' - y_2 y_1''\right) + p\left(y_1 y_2' - y_1' y_2\right) = 0 \qquad (*)$$

وحيث أن:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

فإن:

$$\frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

بالتعويض في (*) نحصل على

$$\frac{dW}{dx} + pW = 0$$

وبحل المعادلة الأخيرة

$$W(x)=ce^{-\int^{x} p(x)dx} \qquad (3)$$

حيث c ثابت التكامل

وحيث أن الدالة الأسية لا تساوي صفراً لا تساوي صفراً فإن $W(x)$ لا تساوي صفراً عند أي نقطة إلا إذا كانت $c = 0$ وإذا كانت $c = 0$ فإن $W(x) = 0$ لجميع قيم x. وهو المطلوب.

نظرية (٤):

إذا كانت الدوال $p(x), q(x)$ دوال متصلة في الفترة(α, β) وكان $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة (1) وكانت $W(y_1, y_2) \neq 0$ فإن $y_1(x), y_2(x)$ هما دالتان غير مرتبطتان خطياً (linearly independent) ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$$

البرهان:

سوف نثبت أنه إذا كانت $W(x) \neq 0$ فإن y_1, y_2 دوال مستقلة خطياً.

نضع

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$$

بإجراء التفاضل

$$c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=0$$

وبحل المعادلتان المتجانستان الأخيرتان في المجهولين c_1, c_2 فإن محددة المعاملات

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

أي أن الحل الوحيد للمعادلتين الأخيرتين هو الحل الصفري، أي

$$c_1 = c_2 = 0$$

وعلى ذلك يكون y_1, y_2 مستقلان خطياً (وذلك إذا كان $W \neq 0$).

وقد بينا من النظرية السابقة أن التركيبة الخطية

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

هي أيضاً حل للمعادلة (1). وهو المطلوب.

نظرية (٥):

إذا كانت $y_1(x)$ هي أحد حلي المعادلة (1) فإن الحل الثاني $y_2(x)$ للمعادلة (1) يحقق العلاقة

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{W(x)}{y_1^2(x)} dx \qquad (4)$$

حيث

$$W(x) = c e^{-\int^x p(x) dx} \qquad (3)$$

وعلى ذلك يمكن حساب $W(x)$ من (3) واستخدام (4) لإيجاد الحل الثاني إذا علم الحل الأول.

ويلاحظ أن y_1, y_2 مستقلان خطياً. (أثبت ذلك).

مثال (١):

بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0 ; \qquad -1 < x < 1$$

ثم أوجد الحل الثاني.

الحـل

حيث أن

$$y_1'(x)=1, \qquad y_1''(x)=0$$

الأيسر من المعادلة = zero – $2x$ + $2x$

الأيمن من المعادلة = zero =

أي أن $y_1 = x$ هو حل للمعادلة ولإيجاد الحل الثاني نكتب المعادلة على الصورة (1) أي أن:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$p(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$\therefore W(x) = c\exp\left(-\int^{x}\frac{2x}{x^2-1}dx\right)$$

$$= c\exp\left(\ln\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right)$$

$$= \frac{c}{x^2-1}$$

$$y_2(x) = cx\int\frac{1}{x^2\left(x^2-1\right)}dx$$

$$= cx\int\left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\right)dx$$

$$= cx\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right\}$$

$$= c + \frac{cx}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

تمارين

(١) تحقق من أن $y(x) = e^x$ هو حل للمعادلة

$$y'' + y' - 2y = 0$$

ثم أوجد الحل الآخر وكذلك الحل العام، وأيضاً الحل الوحيد الذي يحقق الشروط

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

(٢) بين أن $y = x^2$ هو أحد حلول المعادلة

$$x^2 y'' - 2y = 0\,; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل الآخر وكذلك الحل العام للمعادلة.

(٣) بين أن $y_1(x) = 1$ هو حل المعادلة

$$x^2 y'' + 2xy' = 0$$

ثم أوجد حلها العام.

(٤) بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$x^2 y'' + 2xy' - 2 = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٥) بين أن $y_1(x) = 3x^2 - 1$ هو حل للمعادلة

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + 6y = 0\,; \qquad |\,x\,| < 1$$

ثم أوجد الحل العام

(٦) بين أن $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ هو حل للمعادلة

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0\,; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٧) بين أن $y_1(x) = (x-1)$ هو حل للمعادلة

$$x(x-1)y'' + (x-1)y' - y = 0\,; \qquad x > 1$$

ثم أوجد الحل العام.

(٨) بين أن $y_1(x) = x$ هو حل للمعادلة

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0$$

ثم أوجد الحل العام

(٩) بين أن $y_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ هو حل للمعادلة

$$x(x-1)^2 y'' + (x-1)y' + 2(1-3x)y = 0$$

ثم أوجد الحل العام.

(٣-٤) المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

هي معادلات على الصورة:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad (1)$$

حيث a, b, c ثوابت.

سوف نحاول أن نوجد الحل في الصورة e^{rx} حيث r ثابت مطلوب تعيينه. لذلك نفرض أن:

$$y=e^{rx}$$

وعلى ذلك يكون

$$y'=re^{rx}, \qquad y''=r^2e^{rx}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$e^{rx}\left(ar^2+br+c\right)=0$$

وحيث أن $e^{rx}\neq 0$ فإن:

$$ar^2+br+c=0$$

وهي تسمى بالمعادلة المميزة حلها يكون:

$$r=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وتكون قيمتي r متساويتان إذا كانت $b^2-4ac=0$

وتكون قيم r حقيقية مختلفة إذا كانت $b^2-4ac>0$

وتكون قيم r تخيلية (مترافقة) إذا كانت $b^2-4ac<0$

وسوف ندرس كل حالة على حدة.

<u>أولاً:</u> إذا كانت r حقيقية، $r_1 \neq r_2$

حيث

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وفي هذه الحالة يمكن إثبات أن:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}$$

دوال مستقلة، وعلى ذلك هما الحلان الأساسيان للمعادلة التفاضلية (1) كالآتي:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

$$W\left(y_1, y_2; x\right) = \left(r_2 - r_1\right) e^{(r_1 + r_2)x}$$

وحيث أن $r_1 - r_2 \neq 0$ لذلك فإن $W \neq 0$. لذلك فإن الحلان مستقلان ويكون الحل العام للمعادلة (1) بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

<u>مثال (١):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

<u>الحـل</u>

نفرض أن $y = e^{rx}$ وعلى ذلك يكون

$$y' = re^{rx}, \qquad y'' = r^2 e^{rx}$$

والمعادلة المميزة بالصورة

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

$$r_1 = -2, \qquad r_2 = -3$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

<u>ثانياً:</u> إذا كانت $b^2 - 4ac = 0$ فإن:

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

وعلى ذلك يكون أحد الحلول هو:

$$y_1 = e^{\frac{-b}{2a}x}$$

ويكون المطلوب الآن إيجاد الحل الثاني والذي يكون مستقل خطياً عن y_1. كما سبق فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = e^{-\int \frac{b}{a} dx} = e^{\frac{-b}{a}x}$$

ويكون:

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{a}x}} dx = y_1 \int dx = x y_1(x) = x e^{\frac{-b}{2a}x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 x y_1$$
$$= (c_1 + c_2 x) y_1$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

الحـل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r + 2)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = -2$$

$$y_1(x) = e^{-2x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}.$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(1) $y'' + 2y' - 3y = 0$

(2) $6y'' - y' - y = 0$

(3) $4y'' + 4y' + y = 0$

(4) $2y'' - 3y' + y = 0$

(5) $y'' - y = 0$

(6) $y'' - 2y' + y = 0$

(7) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(8) $y'' + 8y' - 9y = 0$

أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(9) $y'' - 5y' + 6y = 0,$ $\quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(10) $y'' - 7y' + 12y = 0,$ $\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(11) $y'' - 6y' + 16y = 0,$ $\quad y(0) = y'(1) = 1$

(12) $y'' - y' - 6y = 0,$ $\quad y(0) = 0, y(1) = 1$

ثالثاً: إذا كانت $b^2 - 4ac < 0$

فإن جذري المعادلة المميزة في هذه الحالة هما جذران مركبان مترافقان (وذلك لأن a, b, c ثوابت حقيقية). ونفرض أنهما على الصورة:

$$r_1 = \lambda + i\mu\,, \qquad r_2 = \lambda - i\mu$$

حيث $\mu\,,\,\lambda$ كميات حقيقية، $i = \sqrt{-1}$.

والآن نترك ذلك جانباً وسوف نعود لـ r_1, r_2 بعد قليل ولنبدأ بتعريف الدالة

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (*)$$

ويلاحظ أن:

$$f(0) = 1$$

بتفاضل (*) بالنسبة إلى θ يكون

$$\frac{df}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$= i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= i\,f$$

$$\frac{df}{f} = i\,d\theta$$

بإجراء تكامل الطرفين، يكون

$$\ln f = i\theta + c$$

حيث أن $\theta = 0$ عندما $f = 1$ ومنها فإن $c = 0$ وعلى ذلك يكون

$$\ln f = i\theta$$

$$\therefore\quad f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

والعلاقة الأخيرة تسمى بصيغة أويلر Euler's formula وعلى ذلك يكون:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i\sin x = e^{-ix}$$

بالجمع والطرح يكون:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

نعود الآن للمعادلة الميزة التي جذراها r_1, r_2 فإن الحلان للمعادلة التفاضلية هما

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{\lambda x + i\mu x}$$

$$y_2 = e^{\lambda x - i\mu x}$$

ولكي نبين أن هذان الحلان مستقلان فإن:

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x}$$

$$\neq 0$$

لأن $r_1 \neq r_2$ وعلى ذلك فإن y_1, y_2 حلان مستقلان خطياً.

نعود الآن للحل العام الذي يأخذ الصورة:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{(\lambda + i\mu)x} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)x} \\ &= e^{\lambda x}\left(c_1 e^{i\mu x} + c_2 e^{-i\mu x}\right) \\ &= e^{\lambda x}\left\{c_1(\cos\mu x + i\sin\mu x) + c_2(\cos\mu x - i\sin\mu x)\right\} \\ &= e^{\lambda x}\left\{(c_1 + c_2)\cos\mu x + i\,(c_1 - c_2)\sin\mu x\right\} \end{aligned}$$

$$= e^{\lambda x}\{c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x\}$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' + y' + y = 0$$

الحـل

المعادلة المميزة هي:

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$\therefore\ r = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{-1}{2}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة:

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

تمارين

أوجد الحل العام لكل مما يأتي:

(1) $y'' - 2y' + 2y = 0$

(2) $y'' + y' + 2y = 0$

(3) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(4) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(5) $9y'' - 6y' + y = 0$

(6) $y'' + 4y' = 0$

أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(7) $y'' + 2y' + 3y = 0;$ $\quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(8) $y'' + 4y' + 5y = 0;$ $\quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

أوجد حل لكل من المعاملات الآتية:

(9) $y'' + iy' + 2y = 0$

(10) $y'' + 2y' + iy = 0$

(11) $y'' - iy' + 2y = 0$

(12) $iy'' + y' - 2y = 0$

لاحظ أن جذري المعادلة المميزة في المسائل (12 – 9) لن تكون مترافقة.

(٣-٥) معادلة أويلر Euler's Equation

هي معادلات على الصورة:

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0 \qquad (1)$$

حيث α, β ثوابت عددية.

ملحوظة:

يلاحظ أن نقطة الأصل هي regular singular ولكننا لن نتعرض لنقط الشذوذ في هذا المقرر وعلى ذلك فإن المعادلة (1) لها حل في أي فترة لا تحتوي على نقطة الأصل. وعلى ذلك فإننا سوف نبحث عن الحل في الصورة:

$$y = x^r, \qquad x > 0$$

حيث r ثابت مطلوب تعيينه. على ذلك يكون:

$$y' = r\,x^{r-1}, \qquad y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (1) يكون

$$x^r\{r(r-1) + \alpha r + \beta\} = 0$$

وحيث أن $x^r \neq 0$ فإن:

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

وحلها هو:

$$r = \frac{1}{2}\left[-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}\right]$$

وهناك ثلاث حالات جديرة بالاعتبار

<u>أولاً:</u> إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta > 0$

فإن:

$$r_1 \neq r_2$$

وعلى ذلك فإن الحلان هما

$$y_1 = x^{r_1}, \qquad y_2 = x^{r_2}$$

ويمكن بسهولة إثبات أنهما مستقلان خطياً وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0; \qquad x > 0$$

الحـل

بالتعويض عن $y = x^r$ نحصل على:

$$x^r\left(2r^2 + r - 1\right) = 0$$

$$\therefore\ 2r^2 + r - 1 = 0$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{1}{2}, \qquad r_2 = -1$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة:

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{x}, \qquad \forall\ x > 0$$

ثانياً: إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta = 0$

في هذه الحالة تكون

$$r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$$

وأحد الحلول يأخذ الصورة

$$y_1(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

ولإيجاد الحل المستقل الآخر نحسب W من المعادلة (1)

$$W(y_1, y_2; x) = e^{-\int \frac{\alpha}{x} dx} = e^{-\alpha \ln x} = x^{-\alpha}$$

وعلى ذلك فإن الحل الثاني y_2 هو

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = y_1 \int \frac{x^{-\alpha}}{x^{1-\alpha}} dx = y_1 \int \frac{dx}{x} = y_1 \ln x$$

وعلى ذلك فإن الحل العام يأخذ الصورة

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= (c_1 + c_2 \ln x) y_1(x) \\ &= (c_1 + c_2 \ln x) x^r \end{aligned}$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0$$

الحــل

بالتعويض عن $y = x^r$ ومشتقاتها يكون

$$x^r (r^2 + 4r + 4) = 0$$

والمعادلة المميزة هي:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$\therefore\ r_1 = r_2 = -2$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(c_1 + c_2 \ln x\right)$$

<u>**ثالثاً:**</u> إذا كانت $(\alpha - 1)^2 - 4\beta < 0$

في هذه الحالة فإن r_1, r_2 هما عددان مركبان مترافقان وذلك إذا كانت α , β أعداد حقيقة.

نفرض أن:

$$r_1 = \lambda + i\mu\,, \qquad r_2 = \lambda - i\mu$$

وسوف نشرح معنى x^r في حالة إذا ما كانت r عدد مركب.

نعلم أن

$$x^r = e^{r \ln x}$$

$$\therefore\quad x^{\lambda + i\mu} = e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} . e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda} e^{i\mu \ln x}$$

$$= x^{\lambda}\left\{\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)\right\}$$

نعود الآن للحل العام لمعادلة أويلر حيث

$$y_1(x) = x^{r_1}, \qquad y_2(x) = x^{r_2}$$

(حيث y_1, y_2 حلول مستقلة خطياً)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$= c_1 x^{(\lambda + i\mu)} + c_2 x^{(\lambda - i\mu)}$$

$$= x^r \left[c_1 \cos(\mu \ln x) + c_1 i \sin(\mu \ln x)\right]$$
$$+ x^r \left[c_2 \cos(\mu \ln x) - c_2 i \sin(\mu \ln x)\right]$$

$$= x^\lambda \left\{(c_1 + c_2)\cos(\mu \ln x) + i(c_1 - c_2)\sin(\mu \ln x)\right\}$$

$$\therefore\ y(x) = x^\lambda \left\{c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x)\right\}$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + 2xy' + y = 0; \qquad x > 0$$

الحــل

نفرض أن $y = x^r$ ونعوض عنها وعن تفاضلاتها في المعادلة نحصل على

$$x^r[r(r-1) + 2r + 1] = 0$$

$$\therefore\ r = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{-1}{2}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$$

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات الآتية:

(1) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(2) $x^2y'' + 3xy' + \dfrac{3}{4}y = 0$

(3) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

(4) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

(5) $x^2y'' - xy' + y = 0$

(6) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

(7) $x^2y'' + 6xy' - y = 0$

(8) $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$

(9) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$

(10) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

(11) $2x^2y'' + xy' + 2y = 0$

(12) $(x-1)^2y'' + 2(x-1)y' + y = 0$

(13) $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$

(14) $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = 0$

(15) $x^2y'' + xy' + iy = 0$

(16) $x^2y'' + ixy' + y = 0$

(٣-٦) المعادلات الغير متجانسة من الرتبة الثانية:

هي معادلات على الصورة:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x) \qquad (1)$$

حيث p, q, g هي دوال متصلة (وذلك لضمان وجود الحل أو الحل الوحيد في حالة إضافة شرطان ابتدائيان).

لاحظ أن المعادلة (1) غير متجانسة لكون الطرف الأيمن منها لا تساوي الصفر.

تعريف:

تعرف المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) بأنها المعادلة

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

نظرية:

الحل العام للمعادلة (1) هو مجموع التركيبة الخطية لحلين غير مرتبطان خطياً للمعادلة (2) مضافاً إليه حل خاص يحقق المعادلة (1).

البرهان:

نفرض أن $y_1(x), y_2(x)$ هما حلان مستقلان للمعادلة (2) ونفرض أن $y_p(x)$ هو أي حل يحقق المعادلة (1) والمطلوب إثبات أن الحل العام للمعادلة (1) هو $y(x)$ حيث:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \qquad (3)$$

حيث أن كل من y_1, y_2 هما حلان للمعادلة (2) فإنهما يحققانها أي أن:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p y_1' + q y_1 &= 0 \\ y_2'' + p y_2' + q y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

وحيث أن y_p يحقق (1) فإن:

$$y_p'' + py_p' + qy_p = g(x) \qquad (**)$$

والآن لنبحث إذا ما كانت $y(x)$ المعطاة بالمعادلة (3) تحقق (1)

$$\text{(1) الأيسر من} = \left(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\right)'' + p(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\right)'$$
$$+ q(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\right)$$
$$= c_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + c_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right)$$
$$+ \left(y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p\right)$$

وباستخدام (**), (*) فإن:

$$\text{(1) الأيسر من} = c_1\text{zero} + c_2\text{zero} + g(x)$$
$$= g(x) = \text{(1) الأيمن من}$$

أي أن (3) هي الحل العام للمعادلة الغير متجانسة (1).

<u>أولاً: إيجاد الحل الخاص</u> y_p للمعادلة الغير متجانسة بطريقة المعاملات الغير محددة:

نفرض أن:

$$g(x) = e^{\alpha x}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n\right)\begin{cases}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{cases}$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n, \beta, \alpha$ ثوابت، n صحيح غير سالب.

نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p = e^{\alpha x}\left(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n\right)\cos\beta x$$
$$+ e^{\alpha x}\left(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n\right)\sin\beta x$$

حيث $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ ثوابت مطلوب تعيينها (لاحظ الفرق بين B_i, β)

<u>ملاحظة هامة:</u>

يلاحظ أنه لا يجب أن يكون أي حد من الحل الخاص على صورة أي من الحلين الأساسيان للمعادلة المناظرة المتجانسة.

وإن وجد أحد الحدود من الحل الخاص مماثلاً (على شكل) أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة فإنه يجب ضرب الحل الخاص في x والأمثلة سوف توضح ذلك.

<u>مثال (١):</u>

أوجد الحل الخاص ثم الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 4\, x^2$$

<u>الحـل</u>

يلاحظ أن المعادلة المناظرة المتجانسة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

ولإيجاد الحل الخاص يلاحظ أن:

$$g(x) = 4x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0,\ \ n = 2$$

وعلى ذلك فإننا نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p = A_0\, x^2 + A_1\, x + A_2$$

وعليه

$$y_p' = 2A_0 x + A_1, \qquad y_p'' = 2A_0$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة يكون

$$2A_0 - 3(2A_0 x + A_1) - 4\left(A_0 x^2 + A_1 x + A_2\right) = 4$$

وبمقارنة معاملات قوى x المختلفة يكون

$$A_0 = -1, \qquad A_1 = \frac{3}{2}, \qquad A_2 = \frac{-13}{8}$$

وعلى ذلك فإن y_p تصبح

$$y_p = -x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

يلاحظ أنه لا يوجد حد في الحل الخاص على شاكلة e^{4x} أو e^{-x} (الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة) وعلى ذلك فإن الحل العام للمعادلة الغير متجانسة هي:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}$$

مثال (٢):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin x$$

الحـل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

وحلولها الأساسية هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

كذلك يلاحظ أن:

$$g(x) = 2\sin x$$

وعلى ذلك فإن:

$$n = 0,\ \beta = 1,\ \alpha = 0$$

وعلى ذلك نبحث عن الحل الخاص y_p بالصورة

$$y_p = A_0\cos x + B_0 \sin x$$

وعليه يكون

$$y'_p = -A_0 \sin x + B_0 \cos x,$$

$$y''_p = -A_0 \cos x - B_0 \sin x$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة الغير متجانسة

$$\begin{aligned}&-\left(A_0 \cos x + B_0 \sin x\right) - 3\left(-A_0 \sin x + B_0 \cos x\right)\\&-4\left(A_0 \cos x + B_0 \sin x\right) = 2\sin x\end{aligned}$$

بمقارنة معاملات $\sin x, \cos x$ في الطرفين

$$-5A_0 - 3B_0 = 0, \qquad 3A_0 - 5B_0 = 2$$

$$\therefore A_0 = \frac{3}{17}, \quad B_0 = \frac{-5}{17}$$

أي أن الحل الخاص يأخذ الصورة:

$$y_p(x) = \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x)$$

والحل العام هو:

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x).$$

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$$

الحــل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة هي:

$$y_1 = e^{4x}, \qquad y_2 = e^{-x}$$

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\therefore\ \alpha = -1, \quad n = 0, \quad \beta = 0$$

لذلك نبحث عن y_p في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 e^{-x}$$

$$\therefore\ y'_p = -A_0 e^{-x}, \qquad y''_p = A_0 e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة يكون:

$$A_0 e^{-x} - 3\left(-A_0 e^{-x}\right) - 4A_0 e^{-x} = e^{-x}$$

وبمقارنة معاملات e^{-x} نجد أن:

$$0.e^{-x} = e^{-x}$$

وهذا غير معقول.

والخطأ هنا أن الحل الخاص الذي نبحث عنه بالصورة $A_0 e^{-x}$ ولكن e^{-x} هو أحد الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة. لذلك يجب ضرب الحل الخاص في x وعلى ذلك يجب أن نبحث عن الحل الخاص في الصورة الآتية:

$$y_p(x) = A_0 x e^{-x}$$

$$\therefore\ y'_p(x) = A_0(1-x)e^{-x}, \qquad y''_p(x) = A_0(-2+x)e^{-x}$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة التفاضلية يكون

$$A_0 e^{-x}\left[(x-2)-3(1-x)-4x\right]=e^{-x}$$

$$-5A_0 e^{-x}=e^{-x}$$

$$\therefore\ A_0=-\frac{1}{5}$$

أي أن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p=-\frac{x}{5}e^{-x}$$

والحل العام بالصورة:

$$y(x)=c_1 e^{4x}+c_2 e^{-x}-\frac{x}{5}e^{-x}$$

مثال (٤):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y''+4y=xe^{x}+x\sin 2x$$

الحـل

الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y_1=\sin 2x,\qquad y_2=\cos 2x$$

وحيث أن:

$$g(x)=xe^{x}+x\sin 2x$$

لذلك نبحث عن الحل الخاص بالصورة:

$$y_p(x)=(A_0x+A_1)e^{x}+(B_0x+B_1)\cos 2x+(C_0x+C_1)\sin 2x$$

وحيث أن $\sin 2x, \cos 2x$ يظهران في الحلول الأساسية لذلك يجب ضرب هذا الجزء من الحل الخاص في x أي يجب أن نبحث عن y_p بالصورة:

$$y_p(x) = (A_0 x + A_1)e^x + \left(B_0 x^2 + B_1 x\right)\cos 2x + \left(C_0 x^2 + C_1 x\right)\sin 2x$$

بحساب y'_p, y''_p والتعويض في المعادلة المعطاة ومقارنة المعاملات نحصل على:

$$A_0 = \frac{1}{5}, \qquad A_1 = \frac{-2}{25}$$

$$B_0 = \frac{-1}{8}, \qquad B_1 = 0$$

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = \frac{1}{16}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = \alpha \sin 2x + \beta \cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{1}{25}(5x - 2)e^x$$

تمارين

باستخدام طريقة المعاملات الغير معينة، أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية ثم أوجد الحل الوحيد إذا أعطيت الشروط:

(1) $y'' + y' - 2y = 2x\,;$ $\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(2) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

(3) $y'' + 2y' = 3 + 4\sin 2x$

(4) $y'' + 4y = x^2 + 3e^{x};$ $\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(5) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

(6) $y'' - 2y' + y = xe^{x} + 4;$ $\qquad y(0) = y'(0) = 0$

(7) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$

(8) $y'' + y = 3\sin 2x + x\cos 2x$

(9) $y'' + 2y' + y = e^{x}\cos x$

(10) $y'' + y' + y = \sin^2 x$

(11) $y'' + y = x(1 + \sin x)$

(12) $y'' - 5y' + 6y = e^{x}\cos 2x + e^{2x}(3x + 4)\sin x$

(13) $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 2e^{-x}\cos x + 4x^2 e^{-x}\sin x$

(14) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\sin 2x$

(15) $y'' + 4y = x^2\sin 2x + (6x + 7)\cos 2x$

(16) $x^2 y'' + xy' + y = x^2$

(17) $x^2 y'' + 2xy' + y = \sin 2x$

(18) $x^2 y'' - 5xy' + 4y = x^2$

(لاحظ أن المسائل من 11 : 15 أكثر صعوبة).

(٣-٧) طريقة تغيير البارامتر:

في هذا الفصل سوف نعطي طريقة أخرى لإيجاد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

حيث المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) هي:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

ونفرض أن الحلان الأساسيان المستقلان للمعادلة (2) هما:

$$y_1(x), \qquad y_2(x)$$

والحل العام للمعادلة (2) هو y_h حيث:

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

وهذه الطريقة تعتمد على أننا نفرض أن الثوابت c_1, c_2 دوال في المتغير x وذلك لإيجاد الحل الخاص، أي أننا سوف نبحث عن الحل الخاص y_p في الصورة:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

ولإيجاد y_p يجب أن نوجد $u_1(x), u_2(x)$ يلاحظ أن y_p وتفاضلاتها يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) وحيث أن y_p بها مجهولين هما $u_1(x), u_2(x)$ لذلك يحق لنا أن نضع شرط واحد على الدوال u_1, u_2 وهذا الشرط اختياري وسوف نختاره بحيث يسهل الحسابات. لذلك:

$$y'_p = \left(u'_1y_1 + u'_2y_2\right) + \left(u_1y'_1 + u_2y'_2\right)$$

وكما قلنا سوف نختار الشرط الآتي لتسهيل الحسابات لذلك نفرض أن:

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 = 0 \qquad (3)$$

وباستخدام (3) فإن y''_p تأخذ الصورة:

$$y''_p = u'_1y'_1 + u'y'_2 + u_1y''_1 + u_2y''_2$$

بالتعويض عن y_p وتفاضلاتها في المعادلة (1) يكون:

$$u_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + u_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right)$$
$$+ u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x)$$

وحيث أن y_1, y_2 هما حلان للمعادلة المتجانسة (2) فإن:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x) \qquad (4)$$

بحل المعادلتين (4) ,(3) في المجاهيل u_1', u_2' نحصل على

$$u_1' = \frac{-y_2 g}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \qquad u_2' = \frac{y_1 g}{y_1y_2' - y_1'y_2}$$

يلاحظ أن

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 \neq 0$$

مما سبق يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية:

إذا كانت $p(x),\ q(x),\ g(x)$ دوال متصلة في الفترة (α, β) في المعادلة التفاضلية (1) وكان y_1, y_2 هما الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة (2) فإن الحل الخاص y_p للمعادلة (1) يكون بالصورة:

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)}dx \qquad (5)$$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' + y = \sec x; \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

الحـل

المعادلة المتجانسة المناظرة

$$y'' + y = 0$$

وحلولها الأساسية هما:

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x$$

وعلى ذلك

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

وباستخدام (5) فإن y_p تصبح

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos\int \sin x \sec x\, dx + \sin x \int \cos x \sec x\, dx \\ &= \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln(\cos x) + x \sin x \\ &= (c_1 + \ln(\cos x))\cos x + (c_2 + x)\sin x \end{aligned}$$

مثال (٢):

أوجد الحل الوحيد للمعادلة الآتية:

$$y'' - y = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

الحـل

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$y'' - y = 0$$

وحلولها الأساسية هما

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x}$$

وبالتالي

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

وباستخدام (5) فإن الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{2} e^x \int e^{-x} e^{2x} dx - \frac{1}{2} e^{-x} \int e^x e^{2x} dx$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{6} e^{2x} = \frac{1}{3} e^{2x}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام بالصورة:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$$

لإيجاد الحل الوحيد نستخدم الشروط

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

$$0 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{1}{3}(1) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0$$

$$1 = c_1(1) + c_2(1) + \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 - c_2 + \frac{2}{3} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{6}$$

ويكون الحل الوحيد هو:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$$

تمارين

باستخدام طريقة تغيير البارامتر أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

(1) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$

(2) $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$

(3) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x);\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(4) $y'' + y = \tan x;\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(5) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(6) $y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{x^2}e^{-2x};\qquad x > 0$

(7) $y'' + 4y = 3\operatorname{cosec}(2x);\qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(٨) معادلة بسل من الرتبة ½ هي:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0;\qquad x > 0$$

(i) تحقق من أن

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},\qquad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

هما الحلول الأساسية للمعادلة

(ii) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 3x^{\frac{3}{2}} \sin x$$

(٩) تحقق من أن $y(x) = x$ هو أحد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2; \qquad x > 0$$

ثم أوجد الحل العام للمعادلة الغير متجانسة.

(١٠) تحقق من أن $y = x$ هو أحد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة:

$$(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x}$$

حيث $0 < x < 1$ ثم أوجد الحل العام للمعادلة الغير متجانسة.

(٣-٨) المؤثر D:

يعرف المؤثر D على أنه المؤثر $\frac{d}{dx}$ وعلى ذلك يكون

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$D^3 = \frac{d^3}{dx^3}, \ldots$$

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

حيث n عدد صحيح موجب.

جبر المؤثر D:

١- لاحظ أن من تعريف المؤثر D يكون

$$D^0 y = 1 \,.\, y = y$$

٢- $D^m(D^n y) = D^{m+n} y$

حيث m, n أعداد صحيحة.

٣- إذا كانت u, v دوال تفاضلية فإن:

$$D(u \pm v) = D\,u \pm D\,v$$

٤- إذا كانت α ثابتة فإن:

$$D(\alpha y) = \alpha D(y), \qquad D(\alpha) = 0$$

٥- $D^n(u \pm v) = D^n(u) \pm D^n(v)$

مثال (١):

احسب قيمة

$$D^n\left(x^4+\sin 2x-5\right)$$

الحـل

$$D^2\left(x^4+\sin 2x-5\right)=D^2\left(x^4\right)+D^2\left(\sin 2x\right)-D^2(5)$$

$$=12x^2-4\sin 2x-0$$
$$=12x^2-4\sin 2x$$

والآن نعرض لبعض النظريات الأساسية المتعلقة بالمؤثر D وذلك لاستخدامها كإحدى الطرق لإيجاد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية

نفرض أن $F(D)$ كثيرة حدود حيث:

$$F(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n \qquad (1)$$

حيث

$a_i=a_i(x),$ n صحيح موجب

لاحظ أن من تعريف $F(D)$ فإن المعادلة التفاضلية لها الصورة:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n=g(x)$$

تأخذ الشكل الآتي:

$$F(D)\,(y)=g(x)$$

نعود الآن لنذكر بعض النظريات التي يحققها وبالتالي $F(D)$ ثم معنى $\dfrac{1}{F(D)}$

أولاً:

معنى $D^n e^{\alpha x}$ ثم $F(D)\left(e^{\alpha x}\right)$ ثم $\dfrac{1}{F(D)} e^{\alpha x}$

لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
De^{\alpha x} &= \alpha e^{\alpha x}, \\
D^2 e^{\alpha x} &= \alpha^2 e^{\alpha x} \\
&\vdots \\
D^n e^{\alpha x} &= \alpha^n e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

ومن تعريف $F(D)$ التي في (1) يكون:

$$
\begin{aligned}
F(D)e^{\alpha x} &= \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\
&= a_0 D^n e^{\alpha x} + a_1 D^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\
&= a_0 \alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \ldots + a_n e^{\alpha x} \\
&= \left(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\alpha x} \\
&= F(\alpha)e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

(لاحظ أن $F(\alpha)$ = ثابت)

وعلى ذلك يكون:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \ \frac{1}{F(D)}\left\{F(\alpha)e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \ F(\alpha)\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\} = e^{\alpha x}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}\right\}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x}}$$

حيث $F(\alpha) \neq 0$

مثال (١):

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y'' - y' - 6y = 2e^{x}$$

الحـل

حل المعادلة المتجانسة كما هو معلوم

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

ولإيجاد الحل الخاص باستخدام المؤثر D نقول المعادلة هي:

$$(D^{2} - D - 6)\, y = 2\, e^{x}$$

حيث

$$F(D) = D^{2} - D - 6$$

$$\therefore\ y_p = \frac{1}{F(D)}\left(2e^{x}\right)$$

حيث $\alpha = 1$

$$= 2\frac{1}{F(D)}\left\{e^{x}\right\}$$

$$= 2\frac{1}{F(\alpha)}e^{x}$$

$$= 2\frac{1}{1-1-6}e^{x}$$

$$= \frac{2}{-6}e^{x}$$

$$= -\frac{1}{3}e^{x}$$

وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة بالصورة الآتية:

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x}$$

<u>مثال (٢):</u>

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 3y = e^{-x}$$

<u>الحـل</u>

المعادلة لها الصورة

$$\left(D^{2} + 2D + 3\right)y = e^{-x}$$

حيث

$$F(D) = D^{2} + 2D + 3, \qquad \alpha = -1$$

$$F(-1) = (-1)^{2} + 2(-1) + 3 = 2 \neq 0$$

$$\therefore \; y_p = \frac{1}{F(D)}\left\{e^{-x}\right\} = \frac{e^{-x}}{F(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x}$$

مثال (٣):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y' - 2y = e^{x}$$

الحـل

لاحظ أن $\alpha = 1$ وكذلك

$$F(D) = D^2 + D - 2$$
$$F(\alpha) = F(1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

واضح أن العلاقة السابقة لا يمكن استخدامها... لماذا؟؟

لذلك سوف نذكر النظرية التالية التي تسمى بنظرية الإزاحة.

ثانياً:

سوف نوجد معنى $v = v(x)$ للآتي $D^n\left\{e^{\alpha x} v\right\}$ ثم $F(D)\left\{e^{\alpha x} v\right\}$ ثم

$$\frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x} v\right\}$$

لاحظ أن:

$$D\left(e^{\alpha x} v\right) = e^{\alpha x} Dv + \alpha e^{\alpha x} v$$
$$= e^{\alpha x}(D + \alpha) v$$

لاحظ أن α = ثابت... كذلك

$$D^2\left(e^{\alpha x}v\right)=D.D\left(e^{\alpha x}v\right)$$

$$=D\left\{e^{\alpha x}\underbrace{(D+\alpha)v}_{V}\right\}$$

$$=D\left\{e^{\alpha x}V\right\}$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)V$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)\left[(D+\alpha)v\right]$$

$$=e^{\alpha x}(D+\alpha)^2v$$

$$D^n\left(e^{\alpha x}v\right)=e^{\alpha x}(D+\alpha)^n v$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned}F(D)\left\{e^{\alpha x}v\right\}&=\left(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_{n-1}D+a_n\right)\left\{e^{\alpha x}v\right\}\\&=e^{\alpha x}\Big[a_0(D+\alpha)^n+a_1(D+\alpha)^{n-1}+\ldots\\&\quad+a_{n-1}(D+\alpha)+a_n\Big]v\\&=e^{\alpha x}F(D+\alpha)v\end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\frac{1}{F(D)}\left\{F(D)e^{\alpha x}v_1\right\}=e^{\alpha x}v_1$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D)}\left\{e^{\alpha x}F(D+\alpha)v_1\right\}=e^{\alpha x}v_1$$

نضع

$$F(D+\alpha)\, v_1 = v$$

$$\therefore\ v_1 = \frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}$$

$$\boxed{\therefore\ \frac{1}{F(D)}\{e^{\alpha x} v\} = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\{v\}}$$

ولبيان كيفية وفائدة نظرية الإزاحة نعود إلى مثال (٣) ص ١٢٨

نعلم أن

$$F(D) = D^2 + D - 2$$

حيث $\alpha = 1$ ومنها $F(\alpha) = 0$ والمعادلة على الشكل

$$F(D)\{y\} = e^x$$

$$\therefore\ \begin{aligned} y_p &= \frac{1}{F(D)}\{e^x\} \\ &= \frac{1}{F(D)}\{e^x .1\} \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية الإزاحة يكون

$$\begin{aligned} y_p &= e^x \frac{1}{F(D+\alpha)}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{(D+1)^2 + (D+1) - 2}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{D(D+3)}\{1\} \\ &= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\{1\}\right] \end{aligned}$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3}\left\{e^0\right\}\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left[\frac{1}{0+3}\right]$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$= y_3 e^x \frac{1}{D}\{1\} \qquad (*)$$

في الخطوة (*) لا يمكن اعتبار $e^0 = 1$ وتطبيق المؤثر $\frac{1}{D}$ عليها لأنه في هذه الحالة سوف يكون المقام صفراً... ولإنهاء المسألة لا بد وأن نعرف المؤثر D^{-1}, D^{-2} وهكذا.

نفرض أن:

$$I\,y = \int y\,dx$$

وبإجراء تفاضل الطرفين يكون

$$\frac{d}{dx} I\,y = \frac{d}{dx}\int y dx$$

$$\therefore\ D\,I\,y = y$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{D}$$

ويتضح من ذلك أن $\frac{1}{D} = D^{-1}$ تعني عملية التكامل فمثلاً

$$\frac{1}{D}\{1\} = D^{-1}\{1\} = \int dx = x$$

$$\frac{1}{D}\left\{x^3\right\}=\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4$$

وعلى ذلك يكون

$$\frac{1}{D^2}\{1\}=\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}\{1\}\right\}=\frac{1}{D}\{x\}=\frac{1}{2}x^2$$

وهكذا

بالعودة الآن إلى الخطوة (*) في ص ١٧١ يكون

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{3}e^x\frac{1}{D}\{1\} \\ &= \frac{1}{3}e^x.x \\ &= \frac{x}{3}e^x \end{aligned}$$

وهو الحل الخاص بالمسألة.

مثال (٤):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y''-2y'=3$$

الحـل

$$F(D)=D^2-2D$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{F(D)}\{3\}=3\frac{1}{D(D-2)}\{1\}$$

$$= 3\frac{1}{D(D-2)}\left\{e^{0}\right\}$$

لاحظ أن $\alpha = 0$ كذلك $F(D) = 0$

$$\therefore\ \ y_p = 3\frac{1}{D}\frac{1}{D-2}\left\{e^{0}\right\}$$

$$\therefore\ \ y_p = 3\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D-2}\right\}$$

$$= 3\frac{1}{D}\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{D}\{1\}$$

$$= -\frac{3}{2}x$$

ثالثا:

نعود الآن لإيجاد معنى كل من

$$F\left(D^2\right)\cos(ax+b),\ F\left(D^2\right)\sin(ax+b)$$

حيث a, b ثوابت وبالتالي معنى

$$\frac{1}{F\left(D^2\right)}\{\cos(ax+b)\},\qquad \frac{1}{F\left(D^2\right)}\{\sin(ax+b)\}$$

نعلم أن

$$D^2\{\sin(ax+b)\} = -a^2\sin(ax+b)$$

كذلك

$$D^4\{\sin(ax+b)\}=D^2\{-a^2\sin(ax+b)\}$$
$$=(-a^2)^2\sin(ax+b)$$

وعلى العموم فإن:

$$(D^2)^n\{\sin(ax+b)\}=(-a^2)^n\sin(ax+b)$$

$$\begin{aligned}F(D^2)\{\sin(ax+b)\}&=\{a_0(D^2)^n+a_1(D^2)^{n-1}+\ldots\\&\quad+a_{n-1}(D^2)+a_n\}\sin(ax+b)\\&=\{a_0(-a^2)^n+a_1(-a^2)^{n-1}+\ldots\\&\quad+a_{n-1}(-a^2)+a_n\}\sin(ax+b)\\&=F(-a^2)\sin(ax+b)\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن:

$$\boxed{F(D^2)\{\cos(ax+b)\}=F(-a^2)\cos(ax+b)}$$

وعليه فإن:

$$\frac{1}{F(D^2)}\{F(D^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\therefore\ \frac{1}{F(D^2)}\{F(-a^2)\sin(ax+b)\}=\sin(ax+b)$$

$$\boxed{\frac{1}{F(D^2)}\{\sin(ax+b)\}=\frac{1}{F(-a^2)}\sin(ax+b)}$$

حيث $F(-a^2)\neq 0$

وكذلك يكون

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\{\cos(ax+b)\}=\frac{1}{F\left(-a^2\right)}\cos(ax+b)}$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن (حيث $F\left(a^2\right)\neq 0$)

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\{\sinh(ax+b)\}=\frac{1}{F\left(a^2\right)}\sinh(ax+b)}$$

$$\boxed{\frac{1}{F\left(D^2\right)}\{\cosh(ax+b)\}=\frac{1}{F\left(a^2\right)}\cosh(ax+b)}$$

وكأمثلة على القوانين السابقة فإن:

مثال (٥):

احسب قيمة كل من

$$\left(D^2+4\right)\{\sin 3x\}=(-9+4)\sin 3x=-5\sin 2x\,,$$

$$\left(D^4+3D^2+7\right)\{\cos x\}=\left[(-1)^2+3(-1)+7\right]\cos x=-\cos x\,,$$

$$\frac{1}{D^2+4}\{\sin 4x\}=\frac{1}{-16+4}\{\sin 4x\}=\frac{-1}{12}\sin 4x\,,$$

$$\frac{1}{D-2}\{\cos 2x\}=\frac{D+2}{D^2-4}\{\cos 2x\}=(D+2)\frac{1}{D^2-4}\{\cos 2x\}$$

$$=(D+2)\left[\frac{1}{-4-4}\right]\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}(D+2)\{\cos 2x\}$$

$$=-\frac{1}{8}\left\{D\cos 2x+2\cos 2x\right\}$$

$$=-\frac{1}{8}\left\{-2\sin 2x+2\cos 2x\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$$

مثال (٦):

احسب قيمة

$$\frac{1}{D^2+D+2}\left\{\cos 2x\right\}$$

الحــل

$$\frac{1}{D^2+D+2}\left\{\cos 2x\right\}=\frac{1}{(-4)+D+2}\left\{\cos 2x\right\}$$

$$=\frac{1}{D-2}\left\{\cos 2x\right\}$$

$$=\frac{D+2}{D^2-4}\left\{\cos 2x\right\}$$

$$=(D+2)\frac{1}{D^2-4}\left\{\cos 2x\right\}$$

$$=(D+2)\left\{\frac{1}{-4-4}\cos 2x\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}(D+2)\cos 2x$$

$$= -\frac{1}{8}[-2\sin 2x + 2\cos 2x]$$

$$= \frac{1}{4}[\sin 2x - \cos 2x]$$

مثال (٧):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + 2y' + y = e^{3x} + 4e^{x}$$

الحـل

$$F(D) = D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$$

$$\therefore \quad y_p = \frac{1}{F(D)}\{e^{3x}\} + \frac{1}{F(D)}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{3x}\} + \frac{1}{(D+1)^2}\{e^{x}\}$$

$$= \frac{1}{16}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{x}$$

مثال (٨):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y'' - 2y' + y = e^{x}$$

الحـل

$$F(D) = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$$

$$\therefore \ y_p = \frac{1}{F(D)}\left\{e^x\right\}$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2}\left\{e^x\right\}$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2}\left\{e^x .1\right\}$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1-1)^2}\left\{1\right\}$$

$$= e^x \frac{1}{D^2}\left\{1\right\}$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}(1)\right\}$$

$$= e^x \frac{1}{D}\left\{x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x$$

والآن سوف نعطي بعض المفكوكات التي تفيد في حل بعض المسائل.

$$\frac{1}{1+D} = 1 - D + D^2 - D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1+D)^2}=1-2D+3D^2-4D^3+\dots$$

$$\frac{1}{(1-D)^2}=1+2D+3D^2+4D^3+\dots$$

وعلى وجه العموم فإن:

$$\frac{1}{(1+D)^m}=1-mD+\frac{m(m+1)}{2!}D^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}D^3+\dots$$

وتلك المفكوكات مفيدة إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية كثيرة حدود.

مثال (٩):

أوجد الحل الخاص للمعادلة

$$y''-y'-2y=3x^2-2x+1$$

الحـل

$$F(D)=\left(D^2-D-2\right)=(D-2)(D+1)$$

$$y_p=\frac{1}{F(D)}\left\{3x^2-2x+1\right\}$$

$$=\frac{1}{(D-2)(D+1)}\left\{3x^3-2x+1\right\}$$

$$=\left[\frac{1/3}{D-2}-\frac{1/3}{D+1}\right]\left\{3x^3-2x+1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-D/2)}-\frac{1}{(1+D)}\right]\left\{3x^2-2x+1\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} + \frac{D^3}{8} + \ldots\right)\right.$$

$$\left. + \left(1 - D + D^2 - D^3 + \ldots\right)\right]\left\{3x^2 - 2x + 1\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2} - \frac{3}{4}D + \frac{9}{8}D^2 - \frac{15}{16}D^3 + \ldots\right]\left\{3x^3 - 2x + 1\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(3x^2 - 2x + 1\right) - \frac{3}{4}\left(3x^2 - 2x + 1\right)'\right.$$

$$\left. + \frac{9}{8}\left(3x^2 - 2x + 1\right)'' + \frac{15}{16}(zero)\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{27}{4}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{13}{4}$$

مثال (١٠):

أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$y'' + y' + y = \cosh x + \sin 2x$$

الحـل

$$F(D) = D^2 + D + 1$$

الحل الخاص بالنسبة إلى $\cosh x$ هو y_{p_1} حيث

$$y_{p_1}=\frac{1}{F(D)}\{\cosh x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{1}{1^2+D+1}\{\cosh x\}=\frac{1}{D+2}\{\cosh x\}$$

$$=\frac{D-2}{D^2-4}\{\cosh x\}=(D-2)\left\{\frac{1}{D^2-4}\cosh x\right\}$$

$$=(D-2)\left\{\frac{1}{1-4}\cosh x\right\}=-\frac{1}{3}(D-2)\cosh x$$

$$=-\frac{1}{3}[\sinh x-2\cosh x].$$

والحل الخاص بالنسبة إلى $\sin 2x$ هو y_{p_2} حيث

$$y_{p_2}=\frac{1}{F(D)}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D^2+D+1}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{1}{-4+D+1}\{\sin 2x\}=\frac{1}{D-3}\{\sin 2x\}$$

$$=\frac{D+3}{D^2-9}\{\sin 2x\}=(D+3)\left\{\frac{1}{D^2-9}\sin 2x\right\}$$

$$=(D+3)\left\{\frac{1}{-4-9}\sin 2x\right\}=-\frac{1}{13}(D+3)\{\sin 2x\}$$

$$=-\frac{1}{13}[2\cos 2x+3\sin 2x]$$

ويكون الحل الخاص هو y_p حيث:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

تمارين

أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات الآتية باستخدام المؤثر D:

(1) $y'' + y' + 6y = e^{-3x} + x.$

(2) $y'' - y' + y = \sin x + \cos x.$

(3) $y'' + y' + 2y = \sinh x + \cosh x.$

(4) $y'' + y' + 3y = \sin 2x + \sinh 3x.$

(5) $y'' - y' - y = \cos 2x - 3 \cosh 3x.$

(6) $y'' + 2y' + 3y = 3x^3 + 2x^2 + 5.$

(7) $y'' + y' = x^2 + \sin x.$

(8) $y'' - y = x + e^x.$

الباب الرابع
مجموعة المعادلات التفاضلية الآنية

(٤-١) في هذا الباب سوف ندرس مجموعة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة، وهي معادلات على الصورة:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 x + f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث a_1, b_1, a_2, b_2 ثوابت. يلاحظ أن المتغير المستقل هو t وهناك متغيران تابعان هما x, y فإذا وضعنا المؤثر

$$\frac{d}{dt} = D$$

أي أن

$$\frac{dy}{dt} = Dy, \qquad \frac{dx}{dt} = Dx$$

فإن المجموعة (1) يمكن كتابتها على الصورة

$$\left.\begin{aligned} (D - a_1)x - \quad b_1 y &= f_1(t) \\ -a_2 x + (D - b_2) y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وسوف ننظر للمجموعة (2) على أنهما معادلتان في مجهولين x, y بحلهما يمكن الحصول على x, y ويساوي أي منهم المؤثر D أو D^2 حيث $D^2 = \dfrac{d^2}{dt^2}$ والأمثلة سوف توضح الفكرة.

مثال (١):

أوجد حل المجموعة (الحل العام)

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0,$$

$$2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلتان باستخدام المؤثر D كالآتي:

$$(D + 3)\, x + y = 0$$

$$(2D - 4)\, x + (D - 1)\, y = e^t$$

ولحذف أحد المتغيران التابعان نضرب الأولى في$-(D-1)$ ثم نجمع على الثانية فنحصل على

$$-(D - 1)(D + 3)\, x + (2D - 4)\, x = e^t$$

ومنها

$$-(D^2 + 2D - 3)\, x + (2D - 4)\, x = e^t$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 3x + 2\frac{dx}{dt} - 4x = e^t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -e^t \qquad (*)$$

وهي معادلة غير متجانسة من الرتبة الثانية كما رأينا في الباب الثالث، ويكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$x_h = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

والحل الخاص هو

$$x_p = -\frac{1}{2}e^t$$

وعلى ذلك فإن الحل المعادلة (*) هو

$$x = x_p + x_h = c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}e^t$$

ولإيجاد المتغير الثاني y نلاحظ أن الأسهل هو استخدام المعادلة الأولى من المجموعة المعطاة فإن:

$$y = -\frac{dx}{dt} - 3x$$

$$\therefore \; y = -\frac{d}{dt}\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}t\right) - 3\left(c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}t\right)$$

$$= (c_2 - 3c_1)\sin t - (3c_2 + c_1)\cos t + 2e^t$$

ويجب الاحتفاظ بالثوابت $(c_1 - 3c_2)$, $-(3c_1 + c_2)$ كما هي حيث أن المجموعة مكونة من معادلتين كل منهم من الرتبة الأولى لذلك فإن المجموعة تكافئ معادلة واحدة من الرتبة الثانية لذلك فإن حلها العام يجب أن يحتوي على ثابتين اختياريان فقط.

مثال (٢):

أوجد حل المجموعة

$$\dot{x} + \dot{y} = x + 2t + 1,$$

$$2\dot{x} + 2\dot{y} = -x + t$$

الحـل

يمكن إعادة كتابة المعادلتان باستخدام المؤثر D كالآتي:

$$(D-1)\,x + D\,y = 2t + 1$$

$$(2D+1)\,x + 2\,D\,y = t$$

بضرب الأولى في 2- والجمع على الثانية يكون وذلك لحذف y

$$(2D+1)\,x - 2(D-1)\,x = t - 2(2t+1)$$

$$2D\,x + x - 2D\,x + 2x = -3t - 2$$

$$3x = -3t - 2$$

$$x = -t - \frac{2}{3}$$

وباستخدام أي من المعادلتان المعطاة ولتكن الأولى فإن:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 2t + 1 - \frac{dx}{dt} + x\\ &= 2t + 1 - \frac{d}{dt}\left(-t - \frac{2}{3}\right) + \left(-t - \frac{2}{3}\right)\\ &= t + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

ومنها

$$y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + c_1$$

والحل العام للمجموعة هو

$$x = -t - \frac{2}{3}, \qquad y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t + c_1$$

يلاحظ أن المجموعة في واقع الأمر هي معادلة واحدة من الرتبة الأولى لذلك فإن الحل العام يحتوي على ثابت واحد فقط.

مثال (٣):

أوجد الحل العام للمجموعة

$$\dot{x} = -2x - 3y, \qquad \dot{y} = 2e^{2t} - 3x - 2y$$

الحــل

باستخدام المؤثر D فإن:

$$(D + 2)\,x + 3\,y = 0$$

$$3x + (D + 2)y = 2e^{2t}$$

لحذف أحد المتغيرين التابعين نضرب الثانية في 3- والأولى في $(D + 2)$ (والضرب يجب أن يكون من جهة اليسار) ثم الجمع نحصل على

$$\left(D + 2\right)^2 x - 9x = -6e^{2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 5x = -6e^{2t}$$

$$x_h = c_1e^t + c_2e^{-5t}$$

$$x_p = -\frac{6}{7}e^{2t}$$

وعلى ذلك فإن

$$x = c_1e^t + c_2e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$$

ولإيجاد y نستخدم المعادلة الأولى فنحصل على

$$y = -\frac{1}{3}\frac{dx}{dt} - \frac{2}{3}x$$

$$= -\frac{1}{3}\left(c_1e^t - 5c_2e^{-5t} - \frac{12}{7}e^{2t}\right) - \frac{2}{3}\left(c_1e^t + c_2e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}\right)$$

$$= -c_1e^t + c_2e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

مثال (٤):

أوجد الحل الوحيد للمجموعة

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 3x - 4y + 2\sin t \qquad , x(0) = 0$$

$$2\dot{x} + \dot{y} = -2x + y = \cos t \qquad , y(0) = 0$$

الحـل

المجموعة تكافئ

$$(D - 3)\,x + 2(D + 2)\,y = 2\sin t$$

$$2(D + 1)\,x + (D - 1)\,y = \cos t$$

بضرب الأولى في $(1 - D)-$ والثانية في $(2 + D)2$ من جهة اليسار ثم الجمع نحصل على

$$4(D + 2)(D + 1)\,x - (D - 1)(D - 3)\,x = 2(D + 2)\cos t - 2(D - 1)\sin t$$

$$\therefore 4(D^2 + 3D + 2)\,x - (D^2 - 4D + 3)\,x = 2D(\cos t) + 4\cos t - 2D(\sin t) + 2\sin t$$

$$(3D^2 + 16D + 5)\,x = -2\cos t + 2\sin t - 2\sin t + 4\cos t$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 16\frac{dx}{dt} + 5x = 2\cos t$$

$$\therefore \quad x_h = c_1 e^{-5t} + c_2{}^{-\frac{t}{3}}$$

$$x_p = \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

$$\therefore \quad x = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{\frac{-t}{3}} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t) \qquad (2)$$

ولإيجاد y نستخدم المعادلة الثانية مثلاً فإن:

$$\frac{dy}{dt} - y = \cos t - 2\frac{dx}{dt} - 2x$$

$$= 8c_1 e^{-5t} - \frac{4}{3}c_2 e^{\frac{-t}{3}} + \frac{1}{65}(47\cos t - 14\sin t)$$

وهي معادلة خطية في y على شكل

$$y' + p(t)\,y = g(t)$$

فيها

$$\mu(t) = e^{-\int dt} = e^{-t}$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu}\left\{c_3 + \int \mu g\,dt\right\}$$

$$= e^{t}\left\{c_3 - \frac{4}{3}c_1 e^{-6t} + c_2 e^{\frac{-4}{3}t} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t)e^{-t}\right\}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{4}{3}c_1 e^{-5t} + c_2 e^{\frac{-t}{3}} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t) + c_3 e^{t} \qquad (3)$$

وحيث أن المجموعة تكافئ معادلة من الرتبة الثانية فإن حلها العام يجب أن يحتوي على ثابتين فقط لذلك إذا عوضنا عن x, y من (3) ,(2) في المعادلة (1) نحصل على $c_3 = 0$ لذلك فإن الحل العام للمجموعة هو

$$x = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{\frac{-t}{3}} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

$$y = -\frac{4}{3} c_1 e^{-5t} + c_2 e^{\frac{-t}{3}} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t)$$

لإيجاد الحل الوحيد الذي يحقق الشرطان $x(0) = y(0) = 0$

$$0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{65}$$

$$0 = -\frac{4}{3} c_1 + c_2 - \frac{33}{130}$$

وهما معادلتان في مجهولين c_1, c_2 بحلهما يكون

$$c_1 = -\frac{3}{26}, \qquad c_2 = \frac{13}{130}$$

وعلى ذلك فإن الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية هو

$$x = -\frac{3}{26} e^{-5t} + \frac{13}{130} e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t)$$

$$y = \frac{2}{13} e^{-5t} + \frac{13}{130} e^{-\frac{t}{3}} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t)$$

تمارين

أوجد الحل العام (أو الحل الوحيد) لكل مما يأتي

(1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + e^t \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = y - x + t^2 \\ \dot{x} = y + x + e^t \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} + y = 1 \\ \dot{x} + 2\dot{y} = x - t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dot{x} - \dot{y} = y - e^t; & x(0) = 0 \\ \dot{y} = y - x + e^{2t}; & y(0) = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dot{x} + 2x + \dot{y} + y = t; & x(0) = 1 \\ \dot{y} + 3y + 5x = t^2; & y(0) = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} + x + 7y = e^t + 2 \\ \dot{y} + 3y = 2\dot{x} + e^t - 1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} + 3y = x + e^{-t} - 1 \\ \ddot{x} + \ddot{y} + 6x + y = e^{2t} + t \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} + x = 1 \\ \ddot{x} - \ddot{y} + y = t \end{cases}$

(9) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = x + y + 1 \\ \dot{x} - \dot{y} = x + t \end{cases}$

(10) $$\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} - x + y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} + y = 1 \end{cases}$$

الباب الخامس

تحويلات لابلاس Laplace Transforms

(٥-١) مقدمة:

من دراستنا السابقة للتكاملات المعتلة في الصف الأول نجد أن

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

مثال (١):

احسب قيمة

$$\int_0^{\infty} e^{sx}dx$$

حيث s بارامتر

الحـل

$$\int_0^{\infty} e^{sx}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{sx}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{s}\left[e^{sx}\right]_0^b$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{sb}-1\right)$$

وعلى ذلك يكون التكامل تقاربي إذا كانت $s < 0$ وتباعدي إذا كانت $s > 0$.

(٥-٢) تحويلات لابلاس:

تعريف:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ بأنه

$$L\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx=F(s)$$

حيث s بارامتر، $L\{.\}$ هو مؤثر لابلاس

واضح أن نتيجة التكامل النهائية تعتمد على s فقط وهذا إذا كان التكامل تقاربي.

والآن سوف نعطي الشرط الكافي لكي يكون للدالة تحويل لابلاس.

نظرية:

نفرض أن $f(x)$ هي دالة piece wise continuous وذلك في الفترة $[0,\infty)$ كذلك نفرض أن $f(x)\le k\,e^{ax}$ حيث k ثابت موجب، a ثابت حقيقي. فإن الدالة $f(x)$ قابلة لتحويلات لابلاس، أي أنه يمكن حساب تحويل لابلاس لهذه الدالة (أي أن التكامل تقاربي) ويعطى من العلاقة

$$L\{f(x)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

البرهان:

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\le k\int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx$$

$$=\int_0^\infty e^{(a-s)x}dx$$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)x} \Big|_0^{\infty}$$

ويكون التكامل تقاربي إذا كانت $s > a$.

أمثلة:

يلاحظ أن الدوال الآتية هي من درجة الدالة ke^{ax}.

$$x^n, \quad \sin x, \quad xe^{bx}$$

الحـل

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{mx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{m^n e^{mx}} = 0$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{e^{mx}} = 0$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{bx}}{e^{mx}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(m-b)x}} \to 0 \; if \;\; m > b$$

في جميع الأمثلة السابقة يمكن إيجاد k, a بحيث تكون $f(x) \le k\, e^{ax}$.

مثال (٢):

الدالة e^{x^2} ليست من درجة e^{mx}

الحـل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{mx}} = \lim_{x\to\infty} e^{(x-m)x}$$

يلاحظ أنه لي اختيار m فإن x تكون أكبر منها وعلى ذلك فإن النهاية تؤول إلى ∞.

الآن سوف نبدأ بإيجاد تحويلات لابلاس لبعض الدوال المشهورة.

مثال (٣):

إذا كانت

$$f(x) = 1$$

فإن

$$F(s) = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}; \qquad s > 0$$

مثال (٤):

إذا كانت

$$f(x) = x$$

فإن

$$F(s) = L\{x\} = \int_0^\infty x e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s}\int_0^\infty x d\left(e^{-sx}\right)$$

$$= -\frac{1}{s} x e^{-sx}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx} dx$$

$$= zero - \frac{1}{s^2} e^{-sx}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

مثال (٥):

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$F(s) = L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

حيث n صحيح موجب. (يترك للطالب)

مثال (٦):

إذا كانت

$$f(x) = e^{ax}$$

حيث a ثابت

$$F(s) = L\{e^{ax}\} = \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s-a} \qquad ; s > a$$

مثال (٧):

أثبت أن $L\{.\}$ مؤثر خطي أي أن:

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

الحــل

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = \int_0^\infty (c_1 f_1 + c_2 f_2) e^{-sx} dx$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(x) e^{-sx} dx + c_2 \int_0^\infty f_2(x) e^{-sx} dx$$

$$= c_1 L\{ f_1\} + c_2 L\{ f_2\}$$

وهو المطلوب

مثال (٨):

إذا كانت

$$f(x) = \sinh bx$$

فإن

$$L\{\sinh bx\} = L\left\{\frac{1}{2}\left(e^{bx} - e^{-bx}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(L\{e^{bx}\} - L\{e^{-bx}\}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b}\right)$$

$$= \frac{b}{s^2 - b^2}$$

مثال (٩):

إذا كانت

$$f(x) = \cos bx$$

فإن

$$F(s) = L\{\cos bx\} = \int_0^\infty \cos bx \, e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s}\int_0^\infty \cos bx \, d\left(e^{-sx}\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\cos bx \, e^{-sx} - \frac{b}{s}\int_0^\infty \sin bx \, e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{b}{s^2}\int \sin bx \, d\left(e^{-sx}\right)$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{b}{s^2}\sin bx \, e^{-sx}\Big|_0^\infty - \frac{b^2}{s^2}\int_0^\infty \cos bx \, e^{-sx} dx$$

$$F(s) = -\frac{b^2}{s^2}F(s) + \frac{1}{s}$$

$$\therefore \;\; F(s) = \frac{s}{b^2 + s^2}$$

ملاحظة:

يلاحظ أن النظرية السابقة تعطي الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس.

مثال (١٠):

الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ هي ليست p-c في الفترة [0, ∞] ولكن يوجد لها تحول لابلاس

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}x^{\frac{-1}{2}}dx=L\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$$

نفرض أن

$$\sqrt{sx}=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{2}{s}t\,dt$$

$$F(s)=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

مثال (١١):

الدالة $f(x)=x^p$ حيث $-1<p<0$ ليست P-C ولكن لها تحويل لابلاس لأن

$$F(s)=L\{x^p\}=\int_0^\infty e^{-sx}x^p dx$$

نفرض أن

$$s\,x=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{dt}{s}$$

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{s}\right)^n\frac{dt}{s}=\frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty t^p e^{-t}dt$$

ومن تعريف دالة

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt$$

$$\therefore\ F(s)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

مثال (١٢):

إذا كانت $f(x)=x^p$ حيث p عدد قياسي موجب

$$F(s)=L\{x^p\}=\int_0^{\infty} x^p e^{-sx} dx$$

بوضع

$$s\,x=t \qquad \Rightarrow \qquad dx=\frac{dt}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^{\infty} t^p e^{-t} dt=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

من مثال (١٠)، (١١) يكون

$$L\{x^p\}=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \qquad ; s>0$$

حيث p عدد قياسي موجب أكبر من 1- .

مثال (١٣):

احسب تحويلات لابلاس للدالة $f'(x)$

الحـل

$$F(s) = L\{f'(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} df(x)$$

$$= \left.\frac{f(x)}{e^{sx}}\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$= 0 - f(0) + sF(s)$$

$$= sF(s) - f(0)$$

مثال (١٤):

احسب تحويلات لابلاس للدالة $f''(x)$

الحـل

$$L\{f''(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} d(f'(x))$$

$$= \left. e^{-sx} f'(x)\right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx$$

$$= 0 - f'(0) + sL\{f'(x)\}$$

$$= -f'(0) + s\,[s\,F(s) - f(0)]$$

$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

ويمكن باستخدام الاستنتاج الرياضي إثبات أن:

$$L\left\{ f^{(n)}(x)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

مثال (١٥):

احسب تحويل لابلاس للتكامل

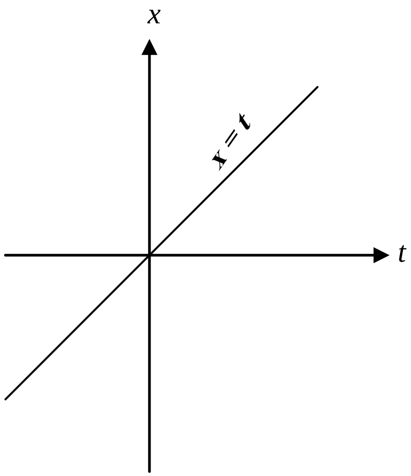
$$\int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

الحـل

$$L\left\{ \int_0^x f(t)g(x-t)dt \right\} = \int_0^\infty e^{-sx} dx \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(t)g(x-t)dt\,dx$$

وبعكس ترتيب التكامل يكون



$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)dt \int_{x=t}^{x=\infty} g(x-t)e^{-sx}dx$$

نفرض أن:

$u = x - t$ (في التكامل الداخلي)

$$\therefore\ du = dx$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)dt \int_{u=0}^{u=\infty} g(u)e^{-s(u+t)}du$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \int_{u=0}^{u=\infty} g(u)e^{-su}du$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}G(s)dt$$

$$= G(s)\int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$= G(s)\ F(s)$$

حيث

$$L\{g(x)\} = G(s), \qquad L\{f(x)\} = F(s)$$

<u>مثال (١٦):</u>

أثبت أن

$$L\left\{\int_{0}^{x} f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

الحـل

نفرض أن:

$$G(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$$

ومنـها

$$G'(x) = \frac{dG}{dx} = f(x), \qquad G(0) = 0$$

وبأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$\therefore \ L\{G'(x)\} = L\{f(x)\}$$

$$\therefore \ sL\{G(x)\} - G(0) = F(s)$$

$$\therefore \ sL\left\{\int_{0}^{x} f(t)dt\right\} - 0 = F(s)$$

$$\therefore \ L\left\{\int_{0}^{x} f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

وهو المطلوب

مثال (١٧):

أثبت أن

$$l\left\{\int_{0}^{x}\int_{0}^{t} f(u)du\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

الحـل

نفرض أن

$$G(x)=\int_0^x\int_0^t f(u)du\,dt$$

$$\therefore\ G'(x)=\frac{dG}{dx}=\int_0^x f(u)du$$

$$G''(x)=f(x),\qquad G(0)=G'(0)=0$$

وبأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$L\{G''(x)\}=L\{f(x)\}$$

$$\therefore\ s^2L\{G(x)\}-sG(0)-G'(0)=F(s)$$

$$\therefore\ s^2L\{G(x)\}-0-0=F(s)$$

$$\therefore\ L\left\{\int_0^x\int_0^t f(u)du\,dt\right\}=\frac{F(s)}{s^2}$$

<u>مثال (١٨):</u>

أثبت أنه لأي عدد صحيح غير سالب n يكون:

$$L\{x^n f(x)\}=(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$$

حيث

$$L\{f(x)\}=F(s)$$

<u>الحــل</u>

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n}\left[\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(e^{-sx} f(x)dx\right)$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty x^n f(x)dx$$

$$= (-1)^n L\{x^n f(x)\}$$

وهو المطلوب.

مثال (١٩):

باستخدام القاعدة في المثال السابق حيث $n = 2$ يكون

$$L\{x^2 \sin bx\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2 + a^2}\right)$$

$$= \frac{a^2 - 3s^2}{\left(s^2 + a^2\right)^3}$$

No	$f(x)=L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=L\{f(x)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$; $s>0$
2	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$; $s>a$
3	x^n, صحيح موجب n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$; $s>a$
4	x^p , عدد قياسي أكبر من سالب واحد p	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$; $s>0$
5	$\sin bx$	$\frac{b}{s^2+b^2}$; $s>0$
6	$\cos bx$	$\frac{s}{s^2+b^2}$; $s>0$
7	$\sinh bx$	$\frac{b}{s^2-b^2}$; $s>0$
8	$\cosh bx$	$\frac{s}{s^2-b^2}$; $s>0$
9	$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$; $s>a$
10	$e^{ax}\cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$; $s>a$
11	$e^{ax}\sinh bx$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$; $s>a$
12	$e^{ax}\cosh bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$; $s>a$

13	$x^n e^{ax}$ صحيح موجب n	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}; \qquad s>a$
14	$e^{ax} f(x)$	$F(s-a)$
15	$f(ax)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right); \qquad a>0$
16	$\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ or $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$	$F(s)G(s)$
17	$(-x)^n f(x)$, صحيح موجب n	$F^{(n)}(s)$
18	$f^{(n)}(x)$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)-\ldots - sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
19	$\int_0^x f(t)dt$	$\dfrac{F(s)}{s}; \qquad s>0$
20	$\int_0^x\int_0^t f(u)dudt$	$\dfrac{F(s)}{s^2}; \qquad s>0$

تمارين

١- في الجدول السابق أثبت صحة العلاقات 18 ,17 ,15 ,14 ,13 ,12

٢- أوجد $f(x)$ إذا كانت:

(i) $F(s)=\dfrac{2s}{s^2+2s-1}$

(ii) $F(s)=\dfrac{2s^2+s+1}{\left(s^2+s+1\right)\left(s^2-2s+3\right)}$

(iii) $F(s)=\dfrac{s+1}{\left(s\ \ -2s-4\right)\left(s+1\right)^2}$

(iv) $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+2\right)^2}$

(v) $F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+2\right)\left(s+1\right)\left(s-3\right)}$

٣- أثبت أنه إذا كانت $L\{f(x)\} = F(s)$ فإن:

$$\lim_{s\to\infty} F(s)=0$$

(٣-٥) استخدام تحويلات لابلاس لحل المعادلات التفاضلية:

مثال (١):

أوجد الحل الوحيد الآتي:

$$y'' + y = \sin(2x); \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

الحـل

بأخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة يكون

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{\sin 2x\}$$

وباستخدام الجداول نجد أن: (حيث $L\{y(x)\} = Y(s)$)

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{2}{s^2+4}$$

ومنها

$$Y = \frac{s^2+6}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

وباستخدام الكسور الجزيئية يكون

$$Y(s) = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي وباستخدام الجداول نجد أن:

$$y(x) = \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

مثال (٢):

باستخدام لابلاس أوجد الحل الوحيد

$$y'' + 2y' - y = e^{x} \sin x \; ; \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$$

الحــل

بأخذ مؤثر لابلاس للطرفين يكون

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 2\left[sY - y(0)\right] - Y = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$\therefore \; \left(s^2 + 2s - 1\right)Y = \frac{1}{(s-1)^2 + 1} + 1$$

$$Y = \frac{s^2 - 2s + 3}{\left(s^2 - 2s + 2\right)\left(s^2 + 2s - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{-16s + 37}{s^2 - 2s + 2} + \frac{16s + 44}{s^2 + 2s - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[\frac{-16(s-1) + 21}{(s-1)^2 + 1} + \frac{16(s+1) + 28}{(s+1)^2 - 2}\right]$$

$$= \frac{1}{17}\left[-16\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 1} + 21\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right.$$

$$\left. + 16\frac{(s+1)}{(s+1)^2 - 2} + \frac{28}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2 - 2}\right]$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي للطرفين، يكون

$$y(x) = \frac{1}{17}\left[-16e^{x}\cos x + 21e^{x}\sin x + 16e^{-x}\cosh\sqrt{2}x + 14\sqrt{2}\sinh\sqrt{2}x\right]$$

تمارين

باستخدام تحويلات لابلاس أوجد الحل الوحيد لكل مما يأتي:

(1) $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(2) $y'' + 3y' + 2y = 1$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(3) $y'' - 2y' + 2y = x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(4) $y'' - 4y' + 4y = e^x$; $y(0) = y'(0) = 0$

(5) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$
$y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1$

(6) $y^{(4)} - y = 0$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$
$y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0$

(7) $y'' - 2y' + 2y = \cos x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(8) $y'' + 2y = \sinh\sqrt{2}x$; $y(0) = y'(0) = 0$

(9) $y'' + 3y' - y = e^x \sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$

(10) $y'' - y' - y = e^x \cosh x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(11) $y''' - 2y'' + y = 1$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

(12) $y''' - y = e^x$; $y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

(٥-٤) استخدام تحويلات لابلاس لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية:

مثال (١):

أوجد الحل الوحيد للمجموعة

$$\frac{dy_1}{dx} + 2y_2 = 1 \qquad ; y_1(0) = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} - y_1 = x \qquad ; y_2(0) = 0$$

الحـل

بأخذ مؤثر لابلاس لطرفي كل من المعادلتين حيث

$$L\{y_1(x)\} = Y_1(s),$$

$$L\{y_2(x)\} = Y_2(s)$$

$$sY_1 + 2Y_2 = \frac{1}{s}$$

$$sY_2 - Y_1 = \frac{1}{s^2}$$

وبحل هاتين المعادلتين يكون

$$Y_1 = \frac{s^2 - 2}{s^2(s^2+2)},$$

$$Y_2 = \frac{2}{s(s^2+2)}$$

وباستخدام الكسور الجزيئية يكون

$$Y_1 = \frac{-1}{s^2} + \frac{2}{s^2+2}$$

$$Y_2 = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+2}$$

وبأخذ مؤثر لابلاس العكسي يكون

$$y_1(x) = -x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x$$

$$y_2(x) = 1 - \cos\sqrt{2}x$$

تمارين

أوجد الحل الوحيد لكل من المجموعات الآتية:

(1) $\begin{cases} y_1' - 2y_2 = x^2 & , y_1(0) = 0 \\ y_2' + 3y_1 = e^x & , y_2(0) = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1' + 2y_2 + 3y_1 = x & , y_1(0) = 1 \\ y_2' - y_1 = 1 & , y_2(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2y_1' + 4y_2 = 1 & , y_1(0) = 0 \\ y_2' + 3y_1 - y_1' = x & , y_2(0) = 1 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y_1' - 2y_2 = \cos x & , y_1(0) = 0 \\ y_2' - y_1 = \sin x & , y_2(0) = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y_1' - 2y_2 + y_1 = 1 & , y_1(0) = 0 \\ y_2' - 2y_1 + 3y_2 = x & , y_2(0) = 0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y_1' - y_2 - y_3 = 1 & , y_1(0) = 0 \\ y_2' + y_2 - y_1 = x & , y_2(0) = 0 \\ y_3' - y_1 + 2y_2 = e^x & , y_3(0) = 0 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y_1' - 2y_2 = \sin x & , y_1(0) = 0 \\ y_2' + y_1 = 1 + x & , y_2(0) = 0 \\ y_3' - y_2 = \cos x & , y_3(0) = 0 \end{cases}$

الباب السادس
حل المعادلات في صورة متسلسلات

(٦-١) مقدمة:

تعريف:

يقال أن الدالة $f(x)$ دالة تحليلية حول النقطة x_0 في الفترة $I = |x - x_0|$ وذلك إذا أمكن كتابة الدالة $f(x)$ على الصورة

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث a_n ثابت.

أي أن الدالة $f(x)$ تكون تحليلية في منطقة ما I حول النقطة x_0 وذلك إذا كان لها مفكوك تايلور حول النقطة x_0.

مثال (١):

الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ليست تحليلية حول نقطة الأصل ولكنها تحليلية حول النقطة $x_0 = 1$ لأن:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-1)^n$$

وذلك في الفترة:

$$I = |x - 1| < 1$$

مثل (٢):

الدوال $\sin x, \cos x, e^{x}, e^{-x}$ تحليلية حول النقطة $x_0 = 0$ وذلك في الفترة $I = |x| < \infty$

مثال (٣):

الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ليست تحليلية حول النقطة $x = 1$ ولكنها تحليلية حول نقطة الأصل لأن:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

وذلك في الفترة $|x| < 1$

مثال (٤):

الدالة $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ ليست تحليلية حول النقطة $x_0 = -1$ ولكنها تحليلية حول نقطة الأصل لأن:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

وذلك في الفترة $-1 < x \leq 1$

(٦-٢) استخدام المتسلسلات لإيجاد حلول معادلات الرتبة الثانية:

نفرض أن لدينا المعادلة

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

نظرية:

إذا كانت $P(x), Q(x)$ دوال تحليلية حول النقاط x_0 فإنه يوجد حل للمعادلة (1) على الصورة

$$y(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

حيث a_n ثوابت يمكن تعيينها بدلالة معاملات الدوال $P(x), Q(x)$.

مثال (١):

أوجد حل المعادلة الآتية في صورة متسلسلة حول نقطة الأصل.

$$y'' - xy' - y = 0 \qquad (*)$$

الحـل

يلاحظ أن $P(x) = -x,\ Q(x) = -1$ دوال تحليلية حول نقطة الأصل، أي يمكن إيجاد حل المعادلة (*) في الصورة $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} ,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (*) يكون

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

بوضع $N = n - 2$ في المجموع الأول فقط وإجراء التغير اللازم في حدود المجموع ثم نستبدل N بـ n في النهاية

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$2(1)a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n\right]x^n = 0$$

بمقارنة معاملات قوى x المختلفة

$$2a_2 = a_0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{a_0}{2} \qquad (1)$$

$$(n + 2)(n + 1)\, a_{n+2} - (n + 1)\, a_n = 0 \Rightarrow \qquad a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)} \qquad (2)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

العلاقة (2) تسمى العلاقة التكرارية لأنها تعين الثوابت a_n لقيم n المختلفة. وحيث أن العلاقة (2) هي بين a_n, a_{n+2} فإن مجموع الثوابت a_i تنقسم إلي قسمين الزوجية والفردية:

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2.4}$$

$$n = 4 \qquad \Rightarrow \qquad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2.4.6}$$

$$n = 6 \qquad \Rightarrow \qquad a_8 = \frac{a_6}{8} = \frac{a_0}{2.4.6.8}$$

ومنها

$$a_{2k} = \frac{a_0}{2^k(k!)} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

ولإيجاد الحدود الفردية

$$n = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = \frac{a_1}{3}$$

$$n = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3.5}$$

$$n = 5 \qquad \Rightarrow \qquad a_7 = \frac{a_5}{7} = \frac{a_1}{3.5.7}$$

$$a_{2k-1} = \frac{a_1}{1.3.5.7 \ldots (2k-1)} \qquad k = 1, 2, \dots \qquad (4)$$

وعلى ذلك يكون الحل هو

$$y(x) = a_0\left(1 + \frac{x^2}{2.4} + \frac{x^4}{2.4.6} + \frac{x^6}{2.4.6.8} + \dots\right) + a_1\left(x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \dots\right)$$

يلاحظ أن $y(x)$ تحتوي على ثابتين هما a_0, a_1 (وهما اختياريان) لذلك فإن $y(x)$ هو الحل العام للمعادلة المعطاه وباستخدام (3), (4) يمكن التعبير عن $y(x)$ كالآتي:

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k(k!)} + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{1.3.5.7 \ldots (2k-1)}$$

نعود الآن للمعادلة التفاضلية

$$y''(x) + P(x)\, y' + Q(x)\, y(x) = 0$$

إذا كانت

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) < \infty \\ \lim_{x\to x_0} Q(x) < \infty\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

فإنه يقال أن النقطة x_0 هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية ordinary point أما إذا لم يتحقق الشرط (1) وكان

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} (x-x_0)P(x) < \infty \\ \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) < \infty\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

فإنه يقال أن النقطة x_0 هي نقطة شذوذ منتظمة للمعادلة التفاضلية regular singular point، أما إذا لم يتحقق الشرطان (2) فإنه يقال أن النقطة x_0 هي نقطة شذوذ غير منتظمة للمعادلة التفاضلية irregular singular point.

مثال (٢):

(i) المعادلة الآتية:

$$y'' - xy' - y = 0$$

فيها

$$P(x) = -x, \qquad Q(x) = 1$$

ولأي نقطة x_0 يكون

$$\lim_{x\to x_0} P(x) < \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} Q(x) < \infty$$

وعلى ذلك أي نقطة x هي نقطة عادية للمعادلة

(ii) المعادلة الآتية

$$(1 - x^2)\, y'' - 2x\, y' + n(n+1)y = 0$$

لأي عدد صحيح موجب n فيها

$$P(x)=\frac{-2}{1-x^2}, \qquad Q(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

وعلى ذلك فإن $x=0$ هي نقطة عادية بينما $x=\pm 1$ هي نقطة شذوذ منتظمة.

(iii) المعادلة

$$x^3y''+\frac{1}{x-1}y'+\frac{1}{(x-1)^2}y=0$$

النقطة $x=0$ هي نقطة شذوذ غير منتظمة، بينما $x=1$ هي نقطة شذوذ منتظمة.

ولأي نقطة أخرى تختلف عن 0, 1 فإنها تكون نقطة عادية.

ملاحظة:

يلاحظ أنه إذا أردنا الحل عند نقطة ما x_0 وكانت هذه النقطة نقطة عادية للمعادلة التفاضلية فإن $P(x), Q(x)$ تكون دوال تحليلية عند هذه النقطة x_0 وعليه يمكن إيجاد الحل حسب النظرية السابقة (نظرية (١)).

مثال (٣):

أوجد حل المعادلة التفاضلية حول نقطة الأصل

$$(1-x^2)\,y''-xy'+4y=0$$

الحـل

يلاحظ أن

$$P(x)=\frac{-x}{1-x^2}, \qquad Q(x)=\frac{4}{1-x^2}$$

وأن نقطة الأصل هي نقطة عادية للمعادلة التفاضلية وعلى ذلك نبحث عن الحل في الصورة

$$y(x) = \sum_{0} a_n x^n$$

$$\therefore \ \ y'(x) = \sum_{1} n a_n x^{n-1}$$

$$\therefore \ \ y''(x) = \sum_{2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

وعلى ذلك

$$-x\,y' = -x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} -n a_n x^n$$

$$\left(1-x^2\right)y'' = \left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة، يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} -n a_n x^n$$

$$+4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\left[2a_2 + 4a_0\right] + \left[3.2a_3 - a_1 + 4a_1\right]x$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[-n(n-1) - n + 4\right]a_n\right\}x^n = 0$$

بمقارنة معاملات قوى x المختلفة يكون

$$a_2 = -2a_0, \qquad a_3 = \frac{-a_1}{2}$$

$$a_{n+2} = \frac{-(n-2)}{(n+1)} a_n ; \qquad\qquad n = 2, 3, \ldots$$

وهي العلاقات التكرارية وهي علاقة بين a_n, a_{n+2} أي أن هناك مجموعتين من الثابت الأولى زوجية وتعتمد على a_0 والثانية فردية وتعتمد على a_1 وعلى ذلك يلاحظ أن:

$$a_4 = a_6 = a_7 = \ldots = 0$$

$$a_5 = \frac{-1}{4} a_3 = \frac{a_1}{2.4}$$

$$a_7 = \frac{-3}{6} a_5 = \frac{-3a_1}{2.4.6}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو

$$y(x) = a_0\left(1 - 2x^2\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} - \frac{3x^7}{2.4.6} + \ldots\right)$$

$$= a_0\left(1 - 2x^2\right) + a_1 x\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)x^2}{1!} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^4}{2!} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^6}{3!} + \ldots\right]$$

$$= a_0\left(1 - 2x^2\right) + a_1 x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$$

$$= a_0\left(1-2x^2\right)+a_1x\sqrt{1-x^2}$$

تمارين

أوجد الحل لكل مما يأتي حول النقطة الموضحة

(1) $y'' + y = 0,$ حول $x = 0$

(2) $(1 - x^2)y'' + xy' - y = 0,$ حول $x = 0$

(3) $(x - 1)y'' - xy' + y = 0,$ حول $x = 0$

(4) $(x^2 + 1)y'' + y' - 2y = 0,$ حول $x = 0$

(5) $y'' - (x + 1)y' + xy = 0,$ حول $x = 0$

(٦-٣) طريقة فروبينيس Frobenius Method

إذا كانت النقطة x_0 نقطة شاذة منتظمة فإن الطريقة السابقة لا تعطي حلاً للمعادلة. وعلى ذلك نبحث عن الحل في صورة أخرى وسوف نأخذ للسهولة $x_0 = 0$

نظرية:

إذا كانت $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة فإن الصورة

$$y = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

(حيث m ثابت موجب أو سالب، $a_0 \neq 0$)

سوف يعطي على الأقل حل واحد للمعادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (2)$$

طريقة الحل:

من (1) يكون

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) a_n x^{n+m-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)(n+m-1) a_n x^{n+m-2}$$

بالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة (2) ذلك حيث

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1)x^{n+m-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)x^{n+m-1}\right)$$
$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}\right) = 0$$

حيث p_n, q_n ثوابت، وبمقارنة معاملات الحد الذي له أصغر قوى في x نحصل على

$$a_0\left(\alpha m^2 + \beta m + c\right) = 0$$

ولكن $a_0 \neq 0$ من الفرض فإن

$$\alpha m^2 + \beta m + c = 0$$

ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية تسمى المعادلة المميزة (Indicial Equation). وهناك ثلاث حالات لجذور هذه المعادلة، وسوف ندرس كل حالة على حدة:

الحالة الأولى: إذا كانت جذري المعادلة المميزة هما m_1, m_2 حيث

$$m_1 \neq m_2 , \qquad m_1 - m_2 \neq \text{صحيح}$$

في هذه الحالة سوف نحصل على حلين الأول هو $y_1(x) = y(x, m_1)$ والثاني $y_2(x) = y(x, m_2)$ ويمكن إثبات أن هذين الحلين مستقلين وعليه يكون الجذر العام بالصورة

$$y(x) = A\, y_1(x) + B\, y_2(x)$$

حيث A, B ثوابت اختيارية.

<u>مثال (١):</u>

أوجد حل المعادلة الآتية حول نقطة الأصل

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

الحـل

يلاحظ أن

$$P(x)=\frac{1}{2x}, \qquad Q(x)=\frac{1}{4x}$$

$$\lim_{x\to 0} xP(x)=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} x^2Q(x)=0$$

وعلى ذلك $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة لذلك نتبع طريقة فروبينيس ونبحث عن الحل في الصورة

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

ومنها يكون

$$4\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(2n+2m-1)a_n x^{n+m-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n x^{n+m-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+m}=0$$

(set $n = N - 1$)

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}2(n+m)(2n+2m-1)a_n x^{n+m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+m-1}=0$$

$$\therefore \; 2a_0m(2m-1)x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+m)(2n+2m-1)a_n+a_{n-1}\right]x^{n+m-1}=0$$

(*)

وعلى ذلك تكون المعادلة المميزة هي

$$2a_0(2m-1)m=0 \qquad (a_0 \neq 0 \text{ ولكن})$$

$$m(2m-1)=0$$

$$m_1=0,\qquad m_2=½$$

ويلاحظ أنهما مختلفان والفرق بينهم ليس عدداً صحيحاً. أما العلاقة التكرارية من المعادلة (*) فهي

$$a_n=\frac{-a_{n-1}}{2(n+m)(2n+2m-1)};\qquad n=1,2,\ldots$$

بوضع $m=0$ نحصل على

$$a_n=\frac{-a_{n-1}}{2n(2n-1)};\qquad n=1,2,\ldots$$

M

$$a_n=\frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

وعلى ذلك يكون

$$y_1(x)=y(x,0)=x^0\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$$

بوضع $m=½$ في العلاقة التكرارية يكون

$$a_n=\frac{-a_{n-1}}{(2n+1)(2n)};\qquad n=1,2,\ldots$$

M

$$a_n=\frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$$

وعلى ذلك يكون

$$y_2(x) = y\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}$$

وعلى ذلك فإن الحل العام هو

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

الحالة الثانية: إذا كانت $m_1 = m_2$

في هذه الحالة يمكننا إيجاد حل واحد فقط وليكن $y_1(x) = y(x, m_1)$ فإنه يمكن إثبات لأن $y_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial m}\right|_{m=m_1}$ هو حل آخر للمعادلة وهو مستقل عن y_1 وعلى ذلك يكون الحل العام للمعادلة

$$y(x) = A\,y_1(x) + B\,y_2(x)$$

<u>مثال (٢):</u>

أوجد الحل العام للمعادلة الآتية حول نقطة الأصل

$$xy'' + y' + x^2y = 0$$

<u>الحـل</u>

النقطة $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة وعلى ذلك بفرض أن

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m}$$

وعليها

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1)x^{n+m-1} \,,$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1)x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)x^{n+m-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m+2} = 0$$

بوضع $n + 2 = N - 1$ في المجموع الأخير يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)^2 x^{n+m-1} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}\, x^{n+m-1} = 0$$

$$a_0 m^2 x^{m-1} + a_1 (m+1)^2 x^m + a_2 (x+2)^2 x^{m+1}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty} \left[a_n (n+m)^2 + a_{n-3} \right] x^{n+m-1} = 0$$

بمقارنة معاملات x ذات القوى المختلفة نحصل على:

أولاً: معاملات قوى x^{m-1}

$$a_0 m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = m_2 = 0$$

ثانياً: معاملات x^m

$$a_1(m+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1(0+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

ثالثا: معاملات x^{m+1}

$$a_2(m+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2(0+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

رابعاً: معاملات x^{n+m-1} حيث $n = 3, 4, \ldots$

$$a_n = \frac{-a_{n-3}}{(n+m)^2}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

على ذلك يكون

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = \text{zero}$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = \text{zero}$$

كذلك

$$a_3 = \frac{-a_0}{(m+3)^2}$$

$$a_6 = \frac{-a_3}{(m+6)^2} = \frac{a_0}{(m+3)^2(m+6)^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$y(x,m) = a_0 x^m \left[1 - \frac{x^3}{(m+3)^2} + \frac{x^6}{(m+3)^2(m+6)^2} - \frac{x^9}{(m+3)^2(m+6)^2(m+9)^2} + \ldots \right] \qquad (*)$$

بوضع $m = 0$ في (*) نحصل على (مع أخذ $a_0 = 1$)

$$y_1(x) = \left[1 - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^6}{3^2.6^2} - \frac{x^9}{3^2.6^2.9^2} + \ldots \right]$$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{3n}}{3^{2n}(n!)^2}$$

وبإجراء تفاضل للمعادلة (*) جزئياً بالنسبة إلى m (وذلك لكي نحصل على الحل الثاني

للمعادلة) فإن:

$$\frac{\partial y(x,m)}{\partial m}=y(x,m)\ln x+2x^m\left[\frac{x^3}{(m+3)^3}-\frac{(2m+9)x^6}{(m+3)^3(m+6)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(3m^2+36m+99\right)x^9}{(m+3)^3(m+6)^3(m+9)^3}+\ldots\right]$$

ولكي نحصل على $y_2(x)$ نضع $m = 0$ فنحصل على

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+2\left[\frac{x^3}{3^3}-\frac{9x^6}{3^3.6^3}+\frac{99x^9}{(3.6.9)^3}+\ldots\right]$$

وعلى ذلك يكون الحل العام بالصورة

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$$
$$=(A+B\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^{3n}}{3^{2n}(n!)^2}+2\left[\frac{x^3}{3^3}-\frac{9x^6}{(3.6)^3}+\frac{99x^9}{(3.6.9)^3}+\ldots\right]$$

الحالة الثانية:

إذا كان الفرق بين جذري المعادلة المميزة عدد صحيح.

بفرض أن جذري المعادلة هما m_1, m_2 حيث $m_1 < m_2$ فإنه بوضع $m = m_1$ في $y(x, m)$ نحصل على أحد الحلول وهو $y_1(x) = y(x, m_1)$ بينما m_2 قد وقد لا يعطي الحل المستقل الثاني وفي تلك الحالة يمكن الحصول على الحل الثاني

$$y_2(x)=\left.\frac{\partial y(x,m)}{\partial m}\right|_{m=m_1}$$

<u>مثال (٣):</u>

أوجد الحل العام حول النقطة $x = 0$ للمعادلة

$$\left(x-x^2\right)y''-3y'+2y=0$$

الحــل

النقطة $x=0$ هي نقطة شاذة منتظمة وعليه

$$\left(x-x^2\right)y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n\left[x^{n+m-1}-x^{n+m}\right]$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}3a_n(n+m)x^{n+m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_n x^{n+m}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n x^{n+m-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+m-1)(n+m-2)a_{n-1}x^{n+m-1}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2a_{n-1}x^{n+m-1}=0$$

$$m(m-4)a_0x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+m)(n+m-4)a_nx^{n+m-1}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(n+m)(n+m-3)a_{n-1}x^{n+m-1}=0$$

$$\therefore m(m-4)a_0x^{m-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+m)\left[(n+m-4)a_n-(n+m-3)a_{n-1}\right]x^{n+m-1}$$

$$=0$$

$$\therefore\ m(m-4)=0 \qquad \Rightarrow \qquad m=0, \qquad m=4$$

والعلاقة التكرارية هي

$$a_n = \left(\frac{n+m-3}{n+m-4}\right)a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_1 = \left(\frac{m-2}{m-3}\right)a_0,$$

$$a_2 = \left(\frac{m-1}{m-3}\right)a_0,$$

$$a_3 = \left(\frac{m}{m-3}\right)a_0,$$

$$a_4 = \left(\frac{m+1}{m-3}\right)a_0,$$

$$\vdots$$

$$a_n = \left(\frac{m+n-3}{m-3}\right)a_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\therefore\ y(x,m) = a_0 x^m \left[1 + \left(\frac{m-2}{m-3}\right)x + \left(\frac{m-1}{m-3}\right)x^2 + \left(\frac{m}{m-3}\right)x^3 + \ldots\right] \quad (*)$$

بأخذ $a_0 = 1$ فإن

$$y(x,m) = x^m \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m+n-3}{m-3}\right)x^n$$

$$y(x,0) = y_1(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3 + 0 - \frac{x^4}{3} - \frac{2}{3}x^5 - x^6 - \frac{4}{3}x^7 - \ldots$$

كذلك يلاحظ أنه إذا وضعنا $m = 4$ نحصل على

$$y(x,4) = x^4\left[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\right] = \frac{x^4}{(1-x)^2}$$

وبالعودة إلى $y_1(x)$ فإنه يمكن كتابته على الصورة

$$y_1(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{3}\left(1 + 2x + 3x^2 + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(3 + 2x + x^3\right) - \frac{x^4}{3(1-x)^2}$$

وحيث أن $y_1(x), y(x, 4)$ مستقلان خطياً، على ذلك يكون الحل الثاني

$$y_2(x) = y(x,4) = \frac{x^4}{(1-x)^2}$$

أي أن قيم m أعطت حلان مستقلان ولكن ذلك لن يكون على وجه العموم.كما سوف نرى في المثال التالي وعلى ذلك فإن الحل العام هو:

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$
$$= A\left(3 + 2x + x^3\right) - \frac{Ax^4}{(1-x)^2} + \frac{Bx^4}{(1-x)^2}$$
$$= A\left(3 + 2x + x^3\right) + \frac{(B-A)x^4}{(1-x)^2}$$

$$= A\left(3 + 2x + x^3\right) + \frac{Bx^4}{\left(1-x^2\right)}$$

مثال (٤):

أوجد الحل العام للمعادلة الآتية حول نقطة الأصل

$$xy'' + (3-x)y' + y = 0$$

الحـل

$x = 0$ نقطة شاذة منتظمة وعلى ذلك

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1)x^{n+m-1}$$

$$(3-x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+m)a_n x^{n+m-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n x^{n+m}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1)x^{n+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+m)a_n x^{n+m-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n x^{n+m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = 0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m+2)x^{n+m-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+m-2)a_{n-1} = 0$$

$$\therefore m(m+2)a_0 x^m + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+m)(n+m+2)a_n$$

$$-(n+m-2)a_{n-1}\Big]x^{n+m-1} = 0$$

$$m(m+2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m_1 = -2, \qquad m_2 = 0$$

والعلاقة التكرارية هي

$$a_n = \frac{(n+m-2)}{(n+m)(n+m+2)}a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$y(x,m)=a_0x^m\left[1+\frac{(m-1)}{(m+1)(m+3)}x+\frac{m(m-1)x^2}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\right.$$
$$+\frac{m(m-1)x^3}{(m+2)(m+3)^2(m+4)(m+5)}$$
$$\left.+\frac{m(m-1)x^4}{(m+3)^2(m+4)(m+5)(m+6)}+...\right]$$

وإذا وضعنا $m = 0$ نحصل على

$$y_1(x)=y(x,0)=a_0\left(1-\frac{1}{3}x\right)=a(3-x)$$

وإذا وضعنا $m = -2$ فإن $a_2 = \infty, a_3 = \infty$ لذلك فإن هذه القيمة لا يمكن أن تعطي الحل الثاني، فإذا فرضنا أن

$$b_0=\frac{a_0}{m+2}$$

فإن:

$$y(x,m)=b_0x^m\left[(m+2)+\frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m+3)}x+\frac{m(m-1)x^2}{(m+1)(m+3)(m+4)}\right.$$
$$\left.+\frac{m(m-1)x^3}{(m+3)^2(m+4)(m+5)}+\frac{m(m-1)(m+2)x^4}{(m+3)(m+4)^2(m+5)(m+6)}+...\right]$$

(*)

فإذا وضعنا $m = -2$ في (*) فإننا نحصل على $y_1(x)$ التي حصلنا عليها سابقاً، لذلك سوف نحسب $\frac{\partial y(x,m)}{\partial m}$ من العلاقة (*)

$$\frac{\partial y(x,m)}{\partial m}=y(x,m)\ln x+b_0x^m\left\{1+x\left[\frac{m-1}{(m+1)(m+3)}+\frac{m+2}{(m+1)(m+3)}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)^2(m+3)}-\frac{(m+2)(m-1)}{(m+1)(m+3)^2}\right]$$

$$+x^2\left[\frac{m}{(m+1)(m+3)(m+4)}+\frac{m-1}{(m+1)(m+3)(m+4)}\right.$$

$$-\frac{m(m-1)}{(m+1)^2(m+3)(m+4)}-\frac{m(m-1)}{(m+1)(m+3)^2(m+4)}$$

$$\left.\left.-\frac{m(m-1)}{(m+1)(m+3)(m+4)^2}\right]+\ldots\right\}$$

بوضع $b_0 = 1$، $m = -2$ نحصل على

$$y_2(x)=\left.\frac{\partial y(x,m)}{\partial m}\right|_{m=-2}=y_1\ln x+\frac{1}{x^2}\left[1-3x+4x^2+\ldots\right]$$

والحل العام بالصورة

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

تمارين

أوجد حل كل من المعادلات الآتية حول نقطة الأصل

(1) $2xy'' + y' - 2y = 0$

(2) $xy'' + 3y' - x^2 y = 0$

(3) $xy'' + y' - xy = 0$

(4) $xy'' - y = 0$

(5) $xy'' + y' + y = 0$

(6) $xy'' + y' - x^2 y = 0$

(7) $(x^3 - x)\, y'' + (8x^2 - 2)y' + 12xy = 0$

(8) $xy'' + y' - y = 0$

(9) $xy'' - 3y' + xy = 0$

(10) $xy'' + y' + xy = 0$

(٦-٤) الحل لقيم x الكبيرة:

قد نحتاج في بعض الأحيان حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \qquad (*)$$

وذلك لقيم x الكبيرة. في هذه الحالة يكون الحل الذي حصلنا عليه حول نقطة الأصل غير ذات قيمة مهما كان كبر نصف قطر تقارب المتسلسلة. فإذا أردنا الحل كمتسلسلة بحيث تكون تقاربية لقيم x الكبيرة، أي عندما تكون $x = \infty$ فإننا نستخدم التعويض

$$x = \frac{1}{t}$$

ثم نوجد حل المعادلة (*) (بعد إجراء اللازم) حول النقطة $t = 0$ التي تناظر قيم x الكبيرة.

مثال (١):

أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية وذلك لقيم x الكبيرة.

$$2x^2(x-1)\,y'' + x(3x+1)y' - 2y = 0$$

الحـل

حيث أن المطلوب الحل لقيم x الكبيرة لذلك يجب عدم دراسة نقط الشذوذ وأنواعها إلا بعد إجراء التحويل المشار إليه سابقاً.

نضع

$$x = \frac{1}{t} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

كذلك

$$y'' = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dt^2}$$

وعلى ذلك يكون

$$\frac{dy}{dx} = -t^2\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

بالتعويض عن x, y', y'' في المعادلة المعطاة، نحصل على

$$2\left(t - t^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 5t)\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

يلاحظ أن

$$\lim_{t\to 0} tP(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1-5t}{2(1-t)} \to \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t\to 0} t^2Q(t) = \lim_{t\to 0}\frac{-2t^2}{2t(1-t)} \to 0$$

أي أن $t = 0$ هي نقطة شذوذ منتظم وعليه باستخدام فروبينيس يكون

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+m}$$

$$2\left(t - t^2\right)\frac{d^2y}{dt^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n t^{n+m-1}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n t^{n+m}$$

$$(1-5t)\frac{dy}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n t^{n+m-1} - 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)a_n t^{n+m}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المحولة مع إجراء تغيير حدود المجموع

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+m)(n+m-1)a_n t^{n+m-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+m-1)(n+m-2)a_{n-1}t^{n+m-1}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)a_n t^{m+n-1} - 5\sum_{n=1}^{\infty}(n+m-1)a_{n-1}t^{n+m} - 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}t^{n+m-1} = 0$$

$$\left[2m(m-1)+m\right]a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{(n+m)(2n+2m-1)a_n$$
$$-\left[(n+m-1)(2n+2m+1)+2\right]a_{n-1}\}t^{n+m-1} = 0$$

وعلى ذلك تكون المعادلة المميزة

$$2m(m-1) + m = 0 \quad \Rightarrow \quad m(2m-1) = 0$$

$$m = 0, \qquad m = ½$$

والعلاقة التكرارية هي

$$a_n = \frac{2(m+n)^2 - (n+m) + 1}{(m+n)(2m+2n-1)}a_{n-1}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بوضع $m = 0$ نحصل على

$$a_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n(2n-1)}a_{n-1}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_1 = 2a_0, \qquad a_2 = \frac{7}{3}a_0, \quad a_3 = \frac{112}{45}a_0, \ \dots$$

وعلى ذلك فإن

$$y_1(t) = a_0\left\{1 + 2t + \frac{7}{3}t^2 + \frac{112}{45}t^3 + \dots\right\}$$

ومنها

$$y_1(x) = a_0\left\{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{3x^2}+\frac{112}{45x^3}+\ldots\right\}$$

بوضع $m = ½$ نحصل على

$$a_n = \frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)+1}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)n}; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$a_1 = \frac{4}{3}a_0, \qquad a_2 = \frac{22}{15}a_0, \quad a_3 = \frac{484}{315}a_0, \ \ldots$$

وعلى ذلك

$$y_2(t) = a_0\sqrt{t}\left\{1+\frac{4}{3}t+\frac{22}{15}t^2+\frac{484}{315}t^3+\ldots\right\}$$

$$y_2(t) = \frac{a_0}{\sqrt{x}}\left\{1+\frac{4}{3x}+\frac{22}{15x^2}+\frac{484}{315x^3}+\ldots\right\}$$

والحل العام هو

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

تمارين

أوجد حل كل من المعادلات الآتية بالقرب من $x = \infty$ في صورة متسلسلات:

(1) $2x^3y'' + x^2y' + y = 0.$

(2) $x^3y'' + (x^2 + x)y' + y = 0.$

(3) $x^3y'' + x(1 - x)y' - y = 0.$

(4) $x^4y'' + xy' + y = 0.$

(5) $x^3y'' + y = 0.$