12) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ باستخدام التعويض المباشر.

نفرض أن: $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \ln y = \frac{1}{x}\ln(1+x) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$ باستخدام التعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال:

$\therefore \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e.$

$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

من ناحية أخرى باستخدام النظرية:

$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{\pm x}$

نفرض أن: $y=\frac{1}{x} \Leftarrow x=\frac{1}{y}.$

$y\to\infty$ at $x\to 0.$

$\therefore \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$

مسائل الدوال من حيث زوجية - فردية - لا زوجية ولا فردية

1) $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3+3(-x)}{(-x)^4-3(-x)^2+4} = -\frac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4} = -f(x)$$

∴ الدالة فردية.

2) $f(x) = |x|$

$\therefore f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

∴ الدالة زوجية.

3) $f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1$

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية.

كل المسائل من هذا النوع تحل بنفس الطريقة.

مسائل النهايات

المسألة الأولى باستخدام تعريف (ϵ, δ) صحيحة باقتراض $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ وليس $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

2) $$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1-x} = -\lim_{x\to 1} \frac{x^{-1/2} - 1^{-1/2}}{x-1} = -(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

OR:
$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x^{1/2}}{x^{1/2}(1-x^{1/2})(1+x^{1/2})} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^{1/2}(1+x^{1/2})} = \frac{1}{2}.$$

1) $2x^2-4x-6 \leq 0 \Rightarrow x^2-2x-3 \leq 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0$

باستخدام دليل الإشارات نجد أن :

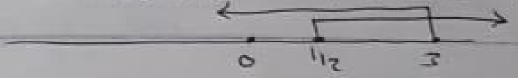
		-1		3	
$x+1$	$- - - -$	0	$+ + + +$		$+ + + +$
$x-3$	$- - -$		$- - -$	0	$+ + + +$
$(x+1)(x-3)$	$+ + + + +$		$- - - -$		$+ + + + +$

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $-1 \leq x \leq 3$

2) $2+3x < 5x+1 < 16 \Rightarrow$

a) $2+3x < 5x+1 \Rightarrow 2-1 < 5x-3x \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

b) $5x+1 < 16 \Rightarrow 5x < 16-1 \Rightarrow 5x < 15 \Rightarrow x < 3$

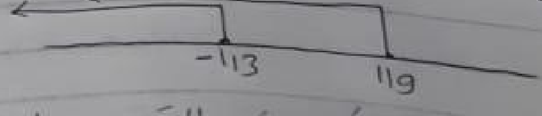


∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $\frac{1}{2} < x < 3$.

المسألة رقم (3) نفس طريقة المسألة رقم (1).

4) $\left|\frac{1}{x}-3\right| \geq 6 \Rightarrow \frac{1}{x}-3 \geq 6$ OR $\frac{1}{x}-3 \leq -6$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \geq 9 \Rightarrow x \leq \frac{1}{9}$ OR $\frac{1}{x} \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3}$



∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $x \leq \frac{1}{9}$ أو بتعبير آخر
$x \in (-\infty, \frac{1}{9}]$.

المسألة رقم (5) نفس طريقة حل المسألة رقم (1).

المسألة رقم (٥) تحل بنفس طريقة المسألة رقم (2).

المسألة رقم (7) بنفس طريقة المسألة رقم (1)

" " (8) بنفس طريقة المسألة رقم (2).

---

9) $|x^2-3|<1 \Rightarrow -1<x^2-3<1 \Rightarrow 2<x^2<4.$

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة: $\pm\sqrt{2}<x<\pm 2.$ $\Leftarrow$

---

10) $2x^2+9x+6 \geq x+2$

$\Rightarrow 2x^2+9x+6-x-2\geq 0 \Rightarrow 2x^2+8x+4\geq 0.$

$\Rightarrow x^2+4x+2\geq 0.$

ومن معادلة الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0 \Leftarrow$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow x^2+4x+2\geq 0 \Rightarrow (x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})\geq 0$

$\Rightarrow (x+3.4)(x+0.6)\geq 0$

∴ باستخدام دليل الإشارات نجد أن:

		-3.4		-0.6	
$x+0.6$	- - -		- - -	0	+ + + + +
$x+3.4$	- - - -	0	+ + + +		+ + + +
$(x+0.6)(x+3.4)$	+ + + +	0	- - - -	0	+ + + + +

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $[(-\infty,-3.4]\cup[-0.6,\infty)]$

أو بتعبير آخر: ← $R-(-3.4,-0.6)$

المسألة رقم (11) و(12) و(13) بنفس طريقة المسألة رقم (2).

14) $|3x+1| < 2|x-6|$

تربيع الطرفين نجد ان:

$(3x+1)^2 < 4(x-6)^2 \Rightarrow 9x^2+6x+1 < 4x^2-48x+144$

$\Rightarrow 9x^2+6x+1-4x^2+48x-144 < 0$

$\Rightarrow 5x^2+54x-143 < 0 \Rightarrow (x+13)(5x-11) < 0$

باستخدام دليل الإشارات نجد ان:

		-13		$\frac{11}{5}$	
$x+13$	$- - -$	0	$+ + +$		$+ + +$
$5x-11$	$- - -$		$- - -$	0	$+ + + +$
$(x+13)(5x-11)$	$+ + + + +$		$- - - - -$		$+ + + + +$

∴ مجموعة الحل تتمثل في قيم x خلال الفترة $-13 < x < \frac{11}{5}$.

المسألة رقم (15) تحل بنفس طريقة المسألة رقم (14).

$f(x) = \sqrt[4]{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

$D_f = \{x : x \in [-1, \infty)\}$ $D_g = \{x : x \in [-3, 3]\}$

$\therefore D_f \cap D_g = [-1, 3].$

$\therefore f(x) \pm g(x) = \sqrt[4]{x+1} \pm \sqrt{9-x^2}, \; x \in [-1, 3]$

$f \cdot g = \sqrt[4]{x+1} \cdot \sqrt{9-x^2}, \; x \in [-1, 3].$

$f / g = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}, \; x \in [-1, 3).$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{9-x^2}) = \sqrt[4]{\sqrt{9-x^2}+1}.$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt[4]{x+1}) = \sqrt{9-\sqrt{x+1}}.$

كل المسائل من هذا النوع تحل بنفس الطريقة.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right)=\infty-\infty$ بالتعويض المباشر

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x+\sin x}=\frac{0}{0}$ باستخدام التعويض المباشر

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{-x\sin x+\cos x+\cos x}=\frac{0}{2}=0.$ بالتعويض المباشر.

8) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin 2x}=\frac{1+\cos\pi}{\sin 2\pi}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال.

$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2\cos 2x}=-\frac{0}{2}=\boxed{0}.$ بالتعويض المباشر.

10) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x\cdot 1\cdot\ln 2}{1}=4\ln 2.$

11) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x}=0\cdot e^{\frac{1}{0}}=0\cdot e^{\infty}=0\cdot\infty$ كمية غير معينة.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{x^{-2}}=\frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{-\frac{2}{x}}=\frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\infty$ بالتعويض المباشر.