6) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0} \right) = \infty - \infty$ بالتعويض المباشر

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال.

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x\cos x + \sin x} = \frac{0}{0}$ باستخدام التعويض المباشر

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{-x\sin x + \cos x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0$ بالتعويض المباشر

8) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin 2x} = \frac{1+\cos \pi}{\sin 2\pi} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال.

$= \lim\limits_{x \to \pi} \frac{-\sin x}{2\cos 2x} = -\frac{0}{2} = \boxed{0}$ بالتعويض المباشر

10) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2^x - 4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ بالتعويض المباشر

∴ باستخدام قاعدة لوبيتال

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{2^x \cdot 1 \cdot \ln 2}{1} = 4 \ln 2$

11) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 e^{1/x} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot e^{\infty} = 0 \cdot \infty$ كمية غير معينة

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{x^{-2}} = \frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \infty$ بالتعويض المباشر.

1) $2x^2-4x-6 \le 0 \Rightarrow x^2-2x-3 \le 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) \le 0$

باستخدام دليل الإشارات نجد أن :

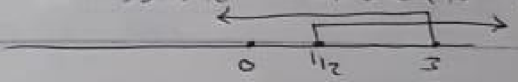
	$x<-1$	-1	$-1<x<3$	3	$x>3$
$x+1$	$-----$	0	$++++$		$++++$
$x-3$	$---$		$---$	0	$++++$
$(x+1)(x-3)$	$+++++$		$----$		$+++++$

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $-1 \le x \le 3$

2) $2+3x<5x+1<16 \Rightarrow$

a) $2+3x<5x+1 \Rightarrow 2-1<5x-3x \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$

b) $5x+1<16 \Rightarrow 5x<16-1 \Rightarrow 5x<15 \Rightarrow x<3$

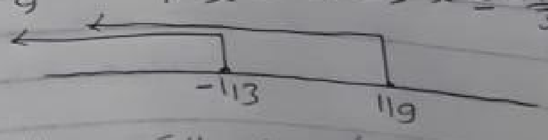


∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $\frac{1}{2}<x<3$.

المسألة رقم (3) نفس طريقة المسألة رقم (1).

4) $\left|\frac{1}{x}-3\right| \ge 6 \Rightarrow \frac{1}{x}-3 \ge 6$ OR $\frac{1}{x}-3 \le -6$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \ge 9 \Rightarrow x \le \frac{1}{9}$ OR $\frac{1}{x} \le -3 \Rightarrow x \le -\frac{1}{3}$



∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $x \le \frac{1}{9}$ أو بتعبير آخر $x \in (-\infty, \frac{1}{9}]$.

المسألة رقم (5) نفس طريقة حل المسألة رقم (1)

المسألة رقم (5) تحل بنفس طريقة المسألة رقم (2).

المسألة رقم (7) بنفس طريقة المسألة رقم (1)

،، ،، (8) بنفس طريقة المسألة رقم (2).

---

9) $|x^2-3|<1 \Rightarrow -1 < x^2-3 < 1 \Rightarrow 2 < x^2 < 4.$

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة: $\Rightarrow \pm\sqrt{2} < x < \pm 2.$

---

10) $2x^2+9x+6 \geq x+2$

$\Rightarrow 2x^2+9x+6-x-2 \geq 0 \Rightarrow 2x^2+8x+4 \geq 0.$

$\Rightarrow x^2+4x+2 \geq 0.$

ومن معادلة الدرجة الثانية $\Leftarrow ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

$\Rightarrow x^2+4x+2 \geq 0 \Rightarrow (x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}) \geq 0$

$\Rightarrow (x+3.4)(x+0.6) \geq 0$

∴ باستخدام دليل الإشارات نجد أن:

		-3.4		-0.6	
$x+0.6$	$- - -$		$- - -$	0	$+ + + + +$
$x+3.4$	$- - - -$	0	$+ + + +$		$+ + + +$
$(x+0.6)(x+3.4)$	$+ + + + +$		$- - - -$		$+ + + + +$

∴ مجموعة الحل هي قيم x خلال الفترة $[(-\infty,-3.4] \cup [-0.6,\infty)]$

أو بتعبير آخر: $\longleftarrow$ $R-(-3.4,-0.6)$

المسألة رقم (11) و(12) و(13) بنفس طريقة المسألة رقم (2).

14) $|3x+1| < 2|x-6|$

تربيع الطرفين نجد أن:

$(3x+1)^2 < 4(x-6)^2 \Rightarrow 9x^2+6x+1 < 4x^2-48x+144$

$\Rightarrow 9x^2+6x+1-4x^2+48x-144 < 0$

$\Rightarrow 5x^2+54x-143 < 0 \Rightarrow (x+13)(5x-11) < 0$

باستخدام دليل الإشارات نجد أن:

	$x < -13$	$-13 < x < \frac{11}{5}$	$x > \frac{11}{5}$
$x+13$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
$5x-11$	$- - -$	$- - -$	$+ + + +$
$(x+13)(5x-11)$	$+ + + + +$	$- - - - -$	$+ + + + +$

$-13 \qquad \frac{11}{5}$

∴ مجموعة الحل تتمثل في قيم x خلال الفترة $-13 < x < \frac{11}{5}$.

المسألة رقم (15) تحل بنفس طريقة المسألة رقم (14).

$f(x) = \sqrt[4]{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.

$D_f = \{x : x \in [-1, \infty)\}$ $D_g = \{x : x \in [-3, 3]\}$

$\therefore D_f \cap D_g = [-1, 3]$.

$\therefore f(x) \pm g(x) = \sqrt[4]{x+1} \pm \sqrt{9-x^2}, \; x \in [-1, 3]$

$f \cdot g = \sqrt[4]{x+1} \cdot \sqrt{9-x^2}, \; x \in [-1, 3]$.

$f/g = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}, \; x \in [-1, 3)$.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{9-x^2}) = \sqrt[4]{\sqrt{9-x^2}+1}$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt[4]{x+1}) = \sqrt{9-\sqrt{x+1}}$.

كل المسائل من هذا النوع تحل بنفس الطريقة.

12) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ باستخدام التعويض المباشر.

نفرض أن : $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \ln y = \frac{1}{x} \ln(1+x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$

باستخدام التعويض المباشر

$\therefore$ باستخدام قاعدة لوبيتال :

$\therefore \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} y = e.$

$\therefore \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

من ناحية أخرى باستخدام النظرية :

$\lim_{n \to \infty} \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{\pm x}$

نفرض أن : $y = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{y}$.

$y \to \infty$ at $x \to 0$.

$\therefore \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e.$

مسائل الدوال من حيث زوجية - فردية - لا زوجية ولا فردية

1) $f(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4}$

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3+3(-x)}{(-x)^4-3(-x)^2+4} = -\dfrac{x^3+3x}{x^4-3x^2+4} = -f(x)$

∴ الدالة فردية .

2) $f(x) = |x|$

$\therefore f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

∴ الدالة زوجية .

3) $f(x) = x^2 - x + 1$

$\therefore f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1$

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية .

كل المسائل من هذا النوع تحل بنفس الطريقة .

مسائل النهايات :

المسألة الأولى باستخدام تعريف (ϵ, δ) صحيحة بافتراض $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ وليس $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{1-x} = -\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{-1/2} - 1^{-1/2}}{x-1} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

OR:

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^{1/2}}{x^{1/2}(1-x^{1/2})(1+x^{1/2})} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^{1/2}(1+x^{1/2})} = \dfrac{1}{2}.$