9- أوجد كل من $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ بالنسبة لـ x للدوال الآتية :

1) $f(x) = e^{6x}$ 2) $f(x) = x^4 - \ln(x e^{2x})$

3) $f(x) = 7x^8 - x^6 - 5$ 4) $f(x) = \tan(2x)$

5) $f(x) = x^{10} - 10$ 6) $f(x) = x^{-8} - x^8$

7) $f(x) = \ln(e^{x^2})$ 8) $f(x) = \sin(e^{\ln x^2})$

10- أوجد المشتقات الأولى والثانية للدوال الآتية :

1) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

2) $x = a\cos^3 t$ $y = b\sin^3 t$

3) $x = \dfrac{3t}{1+t^2}$ $y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}$

11- أوجد المشتقة النونية للدوال الآتية :

1) $y = \sin x$ 2) $y = x e^x$

3) $y = x\ln x$ 4) $y = x^2 e^x$

5) $y = e^x \sin 2x$ 6) $y = x^2 \ln|x-1|$

7) $y = \sqrt{1+x}$ 8) $y = \ln\left\{\dfrac{1+x}{1-x}\right\}$

3) $f(x) = \ln(\tan(x^2 - 1))$

4) $f(x) = {(\ln x)}/{x}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

6) $f(x) = e^{x^2} . \cos(x^2 \ln x - 1)$

7) $f(x) = \ln(\sin 3x^3)^6$

8) $f(x) = \ln(\ln x^3)$

9) $f(x) = e^{\ln(3x-2)} . (\sin(x^3 - 3x^2 + 2))$

10) $f(x) = x^5 . e^{-5x^3 - x} + x^5 e^{-\sqrt{x}\sin x}$

11) $f(x) = \sin(\ln(e^x))$

12) $f(x) = \sin^{-1}(e^x . \ln x)$

13) $f(x) = \ln(\sin^{-1}\sqrt{1 - x^2})$

14) $f(x) = (e^{x^2 \sin x}) + (e.^{\ln(\cos^{-1} x)})$

15) $f(x) = e^{\tan^{-1} x + \ln(\sec^{-1} x)}$

4- أوجد تفاضلات الدوال الآتية :

1) $f(x) = (2x + 3)^{(x^2 - 1)}$

2) $f(x) = (\sin x)^{\tan x^2}$

3) $f(x) = (\ln(x^2 + 2))\, e^{\sin x^2}$

4) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2 (x+1)^3}{(x+2)^4 (x-2)^3}$

5) $f(x) = \dfrac{(x^2 + x - 1)^7 \ (x^2 - 1)^8 \ (x - 2)^9}{(x + 1)^9 \ (x^2 + x + 1)^{10} \ (2x + 4)^8}$

2- إذا كانت $f(z) = z^2 + 3z - 1$ فأوجد كل من :

$f'(2), f'(-1), f'(0), f'(z)$

3- إذا كانت $f(w) = \sqrt{w}$ حيث $w \neq 0$ فأوجد كل من :

$f'(1), f'(4), f'(3), f'(a), \quad (a>0)$

4- أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الضمنية الآتية :

1) $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

2) $x^2 + xy + y^2 = 6$

3) $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 6$

4) $x^2 + 3xy - y^2 = 20$

5) $\frac{x}{y} - 2y = x$

6) $\sqrt[3]{xy} + x = \sqrt[3]{y^2}$

7) $\frac{x-y}{x+y} = x$

8) $\frac{y2}{x+y} = 1 - x^2$

9) $x + 1 + 2y\sqrt{y} = x^2$

10) $y + \sqrt{xy^3} = 7x^3$

5- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

1) $f(x) = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

2) $f(x) = x^2 \sin 3x^4$

3) $f(x) = \sin^3(4x-3)$

4) $f(x) = (x^3 + \tan x)^4$

5) $f(x) = \cos(x^2 - 3x)$

6) $f(x) = \sec^2(2x^3 + 3)$

7) $f(x) = (\ln (2x - 5) \sin^5 (x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$

8) $f(x) = e^{x^2} . \sin(\tan x)$

9) $f(x) = \tan (\sec^2 (3x - 1))$

10) $f(x) = \operatorname{cosec}(2 \tan \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}})$

6- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

1) $f(x) = \sin^{-1} (4x + 5)$

2) $f(x) = \sin^{-1} (5 \cos(2x + 4))$

3) $f(x) = \tan^{-1} (x^2 - 2)$

4) $f(x) = \csc^{-1}(2 \tan \dfrac{x}{2})$

5) $f(x) = \tan^{-1} (2 \sec^2 x)$

6) $f(x) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\sqrt{1 + \tan x}\right)$

7) $f(x) = \sec^{-1}\left(\dfrac{2x + 1}{2x - 1}\right)$

8) $f(x) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}\right)$

9) $f(x) = \sin^{-1}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$

10) $f(x) = \cot^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$

7- أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = \log_e\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2) $f(x) = \ln (\cos x)$

18) $f(x) = (x^2 (5x^{10} + 1)^8 - 1)^7$

19) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{10}$, $(x \neq -1)$

20) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $(x \neq \pm 1)$

21) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $(x \neq -1)$

22) $f(x) = \dfrac{(3x^3 - 4x^2 + 6x + 8)^9}{x^2}$, $(x \neq 0)$

23) $f(x) = \sqrt[9]{x^2 - x} - 1$

24) $f(x) = x^2 (3x^4 - 3x^3 - 6)^6$

25) $f(x) = \dfrac{(10x^5 + 7x^8 - 2x)^{18}}{x^{20}}$, $(x \neq 0)$

26) $f(x) = \sqrt{(2x+1)^7}$

27) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^{3/2}$, $(x \neq 0)$

28) $f(x) = \left(2x^2 + \dfrac{x}{2}\right)^{1/2}$

29) $f(x) = (1+2x)\sqrt{x^2 - 4}$, $(x \neq \pm 2)$

تمارين

ستخدام القواعد الأولية للتفاضل أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = 4x^6$

2) $f(x) = 5x^2$

3) $f(x) = 18x^2$

4) $f(x) = 2x^2 + 5x + 6$

5) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

6) $f(x) = 5x^2 - 6x$

7) $f(x) = (x^2+1)(x-1)$

8) $f(x) = (x^2-1)(x^2+3)$

9) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

10) $f(x) = (x^3+1)(x^4 - x+5)$

11) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $(x \neq -1)$

12) $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

13) $f(x) = \dfrac{x - 2x + 1}{x - 1}$, $(x \neq 1)$

14) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}$

15) $f(x) = \dfrac{x\,2+1}{x-2}$; $(x \neq 2)$

16) $f(x) = x^{-3} + x^{-2}$, $(x \neq 0)$

17) $f(x) = (x^2 + 1)^{10}$

(4) ناقش اتصال الدوال الآتية

(i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & \text{if } x\neq 3 \\ 2 & \text{if } x=3 \end{cases}$ at $x=3$

(ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-2}{|x-1|} & \text{if } x\neq 1 \\ 0 & \text{if } x=1 \end{cases}$ at $x=1$

(iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{[x+3]}{|x|} & \text{if } x\prec -1 \\ 0 & \text{if } x\geq -1 \end{cases}$ at $x=-1$

(5) حدد قيم x التي تكون عندها الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6}$

متصلة

(6) أثبت أن الدالة $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x\neq 0 \end{cases}$

متصلة عند نقطة الأصل.

(7) أحسب نهاية الدوال الآتية :

(1) $\lim\limits_{x\to -3}|x|$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1+3}{1+2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$

(4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

(iii) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\ .\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\ \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}=\infty$$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}+1=\lim\frac{x}{x}+1=2 \quad , \quad x>1$ إذا كانت

(v) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}+1=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x}{x}+1=0 \quad , \quad x<1$ إذا كانت

(vi) $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan 5\theta}{\sin 7\theta}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan 5\theta}{5\theta}\cdot\frac{5\theta}{7\theta}\cdot\frac{7\theta}{\sin 7\theta}=\frac{5}{7}$$

(vii) $$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t\tan 3t}{t.\sin 7t}=\lim_{t\to 0}2\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{\tan 3t}{3t}\cdot\frac{3t}{7t}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 7t}{7t}}=2.1.\frac{3}{7}.1=617$$

(viii) $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\ \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}=$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}=2$$

(ix) $$\lim\frac{\theta^2\sin 3\theta}{\tan 5\theta\ .\sin^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\theta^2\ \frac{\sin 3\theta}{3\theta}.3.\frac{5\theta}{\tan 5\theta}\cdot\frac{1}{5\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=315$$

(x) $$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x^2}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}$$

(i) $$f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{if } x<0 \\ 3x+4 & \text{if } x>0 \end{cases} \quad at \quad x=0$$

(ii) $$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{if } x<2 \\ 1 & \text{if } x=2 \\ (\sqrt[3]{x}\ 4)^2 & \text{if } x>2 \end{cases} \quad at \quad x=2$$

(iii) $$f(x)=\begin{cases} & \text{if } x\le 1 \\ 2x-1 & \text{if } x>1 \end{cases} \quad at \quad x=1$$

(iv) $f(x)=[2x+3]$ at $x=\dfrac{-3}{2}$

(v) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{(x-2)}$ at $x=2$

(vi) $f(x)=x-[x]$ at $x=-2$

(vii) $f(x)=[x+[x]]$ at $x=0$

... الدالة

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{if } x\neq 4 \\ 8 & \text{if } x=4 \end{cases}$$

... $x = 4$.

12- أوجد المشتقات الأولى والثانية لكل من :

1) $2x^2+6y^2+x=5$ 2) $x^3+y^3+xy^2+x+2=0$

3) $x^2+x^2y+yx^2+3=0$ 4) $x^4+y^4+2yx+5=5$

13- اثبت صحة نظرية رول للدوال التالية

(i) $y=x^2-3x+2$, في الفترة $[1,2]$

(ii) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$, في الفترة $[1,3]$

14- تحقق من صحة نظرية رول بالنسبة للدالة $y=\cos^2 x$ في الفترة $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

15- تحقق من صحة نظرية رول بالنسبة للدالة $y=2x-x^2$ في الفترة $[0,1]$

16- اكتب علاقة كوشى للدالتين $g(x)=x^3$, $f(x)=x^2$ في الفترة المقفلة $[1,2]$ وأوجد c .

17- أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدتى لوبيتال :-

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{1-\cos x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{\sin^3 x}$ (6) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y+\sin y-1}{\ln(1+y)}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0}\left(1+\dfrac{x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$

(6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$

(7) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-5}$

(8) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

(9) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

(25) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

(26) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

(27) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x - |x|}$

(28) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 6x}$

(29) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\tan 5\theta}{\sin 7\theta}$

(30) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin 2t . \tan 3t}{t . \sin 7t}$

(31) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin^2 \theta}{1-\cos\theta}$

(32) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$

(33) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta^2 \sin 3\theta}{\tan 5\theta . \sin^2 \theta}$

(34) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2mx}{1-\cos 2nx}$

(35) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$

(36) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x . \tan x$

(37) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{1-\cos x^2}{1-\cos x}}$

(38) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^{-1} x}{3x}$

(8) أوجد النهايات الآتية :

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2+3x}{2x+1}\right)^{x+1}$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin 2\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x}\right)\sin^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{x^2}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=0$$

9- أوجد النهايات التالية :

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2+3x}{2x+1}\right]^{x+1}$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-5}$

(vi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$

(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

<u>الحـــــل :</u>

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}(1-y)^{y}=1^0=1$ و وذلك بوضع $\frac{1}{x}=y$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y}\doteq\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3}=e^3$ و وذلك بوضع $\frac{3}{x}=\frac{1}{y}$

(iii)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1+x}-\frac{1}{1+x}\right)^x=$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}(1+y)^{-1-y}=(1)^{-1}=\frac{1}{1}$$

وذلك بوضع $-\frac{1}{1+x}=y$] اى $1+x=-y$ اى [$x=-y-1$

(iv) $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2+3x}{2x+1}\right]^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{2}{x}+3}{2+\frac{1}{x}}\right]^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{2}\right]^{\infty}=\infty$$ (لان $3>2$)

(v) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-5}=e\,.\,1=e$$

(vi) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{y\to 0}(1+\sin y)^{\frac{3}{\sin y}}=e^3$$

وذلك بوضع $x-\frac{\pi}{2}=y$

(vii) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1-2y}{3y}}=$$
$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{3y}}\ .\ (1+y)^{-\frac{2}{3}}=e^{\frac{1}{3}}\ .\ 1=e^{\frac{1}{3}}$$

وذلك بوضع $y=\frac{x}{2x+1}$

الشرطان متساويان وبالتالى فان الدالة متصلة عند $x=0$

8- أوجد النهايات التالية

$(i)\ \lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{2\sin x\cos x}{x}\right|$, $(ii)\ \lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{3x^2-6x}{4x-8}\right|$

$(iii)\ \lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right|$, $(iv)\ \lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}+1$

$(v)\ \lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}\right|$, $(vi)\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan 5\theta}{\sin 7\theta}$

$(vii)\ \lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 2t\ \tan 3t}{t\,.\sin 7t}$, $(viii)\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$(ix)\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$, $(x)\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\theta^2\sin 3\theta}{\tan 5\theta\,.\sin^2\theta}$

$(xi)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{1-\cos x^2}{1-\cos x}}$, $(xii)\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

<u>الحـل :</u>

$$(i)\quad \lim_{x\to\infty}\left|\frac{2\sin x\cos x}{x}\right| \le \lim_{x\to\infty}\frac{2}{|x|}=0$$

$$(ii)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x}{4x-8}=\lim\frac{3-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-\dfrac{8}{x^2}}=\frac{3}{0}=\infty$$

(5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x+5}$

(6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+7}$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x.\cos x}{x}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x}{4x-8}$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1^3+7}{1^4}$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x+2}{10x^3+5}$

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 6x}{x}$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}1+\cos\dfrac{1}{x}$

(15) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x+7}}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt[3]{x}-125}{\sqrt{x}-5}$

(18) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^6-1}{x-1}$

(19) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

(20) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3-2}}$

(21) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4x+3}$

(22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(23) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{|x|}{x}+1\right)$

(24) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{|x|}{x}+2\right)$

تمارين

(1) أوجد النهايات الأتية :

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^{2+1}}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin x-\cos x+\cot x$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{\sqrt{2+x}}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 2} 3(x-2)\sin\dfrac{2}{x-2}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3}/\sqrt{x^3+1}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$

(xi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 4x}{\tan^2 5x}$

(xii) $\lim\limits_{t\to 5^+}\dfrac{|t-5|}{5-t}$

(xiii) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{2(x^2-4)}$

(xiv) $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

(xv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(2) عين النهايات اليمني واليسري (إن وجدت) لكل من الدوال الأتية عند النقاط المشار إليها:

$$(viii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{1+y+\frac{y^{2}}{2!}+\frac{y^{3}}{3!}+\ldots\ldots-1}=1$$

وذلك بوضع $y=\ln(1+x)$

ملاحظة :

يجب أن نلاحظ أن المقدار $e^{2\sin e}$ مقدار ثابت والمشتقة الأولى له بالنسبة إلى x تساوي الصفر.

مثال (٤. ٢. ١٣) : أوجد y' للدوال :

(i) $y = x\arcsin(e^{-2x})$

الحل :

$$y' = \arcsin(e^{-2x}) + x\,\frac{1}{\sqrt{1-(e^{-2x})^2}}\,e^{-2x}(-2)$$

$$= \arcsin(e^{-2x}) - \frac{2xe^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}$$

الحل :

$$y' = \sec^2\sqrt{\sin(e^{2x}-1)}\;\frac{(\cos(e^{2x}-1))(e^{2x})(2)}{2\sqrt{\sin(e^{2x}-1)}}$$

$$= \frac{e^{2x}\cos(e^{2x}-1)}{\sqrt{\sin(e^{2x}-1)}}\sec^2\sqrt{\sin(e^{2x}-1)}$$

(iii) $y = \ln(1+\cos^2 x)$

الحل :

$$y' = \frac{-2\cos x\sin x}{1+\cos^2 x} = \frac{-\sin 2x}{1+\cos^2 x}$$

(iv) $y = e^{\sin 2x}$

الحل :

$$y=x^r=((-1)(-x))^r=(-1)^r(-x)^r$$

وباستخدام أولاً نحصل على :

$$\frac{dy}{dx}=(-1)^r r(-x)^{r-1}(-1)=(-1)^{r+1} r(-x)^{r-1}=r x^{r-1}$$

إذن

$$\boxed{\frac{d}{dx}[x^r]=r x^{r-1} \; ; \; (r\in R \,,\, r\neq 0)}$$

وباستخدام قاعدة السلسلة والنظرية يمكن البرهنة على صحة النظرية التالية:

نظرية (٤. ٢. ١٥) :

إذا كانت الدالة $u=u(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ وكان r عدد حقيقي لا يساوى الصفر ، فإن

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u^r]=r\, u^{r-1}\, u' \; ; \; \forall\, x\in]a,b[}$$

مثال (٤. ٢. ١٦) :

أوجد y' للدالة : $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

الحل :

الدالة y تأخذ الصورة $y=x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. إذن

$$y'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-(2)\frac{-1}{(\sqrt{x})^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

تمارين (٢ . ٤)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية :

$(i)\ y=\ln\frac{3x^2+1}{x^2}\qquad (ii)\ y=(\sec x)^{\cot x}\ ;x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :

$(i)\ y=e^{-x}(1-x^2)\sin\frac{x}{2}\qquad (ii)\ y=\frac{\ln 3(\sin x+\cos x)}{3^x}$

$(iii)\ y=(\frac{2}{3})^x(\frac{3}{x})^2(\frac{x}{2})^3\qquad (iv)\ y=(\ln x)\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$(v)\ y=\frac{1}{x}[\ln^3 x+3\ln^2 x+6]-\sqrt{1+x^2}$

$(vi)\ y=\ln(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x})+(1-\sqrt[3]{1+x^2})^2$

$(vii)\ y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$

أوجد y' للدوال :

$(i)\ y=\ln\sin 2x+x^{\tan x}\qquad (ii)\ y=x^{x^x}$

$(iii)\ y=\ln\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}\qquad (iv)\ y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

أوجد y' للدوال :

$(i)\ y=\ln\ln x\qquad (ii)\ y=2x^3\cos x\sin 2x+\sin e^{2x^2}$

$(iii)\ y=(x\ln x)+\ln x^2\qquad (iv)\ y=10^{\sin 2x}+\cos 2x$

كان $y=a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)$ ، حيث $a,b\in R$.

$x^2y''+xy'+y=0$.

أخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على : $\ln y = (\sin x)\ \ln x$

ل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y} y' = (\cos x) \ln x + (\sin x) \frac{1}{x}$$

ب فإن

$$y' = y[(\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}]$$

$$y' = x^{\sin x} [(\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}]$$

قة أخرى مباشرة :

ن الملاحظة السابقة وباستخدام القانون المعطى نحصل على :

$$y' = x^{\sin x} (\cos x) \ln x + (\sin x) x^{\sin x - 1}$$

$$= x^{\sin x} [(\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}]$$

$$(vi) \qquad y = x^{\ln x} + x^3 \ ; (x > 0)$$

: بتطبيق القانون فى الملاحظة السابقة نحصل على :

$$y' = x^{\ln x} \frac{1}{x} \ln x + (\ln x) x^{(\ln x) - 1} + 3x^2$$

$$= x^{\ln x} [\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}] + 3x^2 = \frac{2 \ln x}{x} x^{\ln x} + 3x^2$$

قة أخرى :

ي هذا المثال لا نستطيع أخذ لوغاريتم الطرفين مباشرة حيث أن لوغاريتم مجموع

ريتين لا يساوي مجموع اللوغاريتمات وعليه نضع $z = x^{\ln x}$ فيكون

$y = z + x^3$. إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 3x^2$$

... اللوغاريتم الطبيعي قبل إجراء عملية التفاضل . الأمثلة التالية توضح ذلك.

أمثلة (٤ . ٢ . ١٢) : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

(i) $y=\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

الحل :

لاحظ أن $y>0$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$$\ln y=\ln[\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}]=2\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\,[\frac{2}{x-2}-\frac{x}{x^2+1}]$$

$$=\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+1}}[\frac{x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}]$$

$$=\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$y' = 3e^x + \frac{1}{\tan x}\sec^2 x = 3e^x + \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$= 3e^x + \sec x \csc x$$

$(x)\quad y = x^3 + \ln\sqrt{x^2-4}\quad ; \ (|x| > 4)$

حل:

$$y' = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = 3x^2 + \frac{x}{x^2-4}$$

$(xi)\quad y = 2^x 3^{-x} \arcsin x$

حل:

يمكن وضع الدالة المعطاة على الصورة : $y = (\frac{2}{3})^x \arcsin x$

$$y' = (\frac{2}{3})^x (\ln(\frac{2}{3}))(\arcsin x) + (\frac{2}{3})^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

نظرية (٤. ٢. ١٤):

إذا كانت $y = f(x) = x^r$ حيث r عدد حقيقي لا يساوى الصفر. فإن

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = r\,x^{r-1}}$$

برهان:

أولاً: في حالة $x > 0$: نجد أن $y = x^r = e^{\ln x^r} = e^{r \ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{r\ln x}\cdot\frac{r}{x} = r\,x^{r-1}$$

ثانياً: في حالة $x < 0$: بما أن $x < 0$ إذن $-x > 0$ ويكون :

$$y' = e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2) = 2(\cos 2x)e^{\sin 2x}$$

$(v)\quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

الحل :

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$(vi)\quad y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad ; \ (|x|<1)$

الحل :

الدالة المعطاة تأخذ الصورة : $y = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$(vii)\quad y = \ln\sqrt{\cos\sqrt{e^{-x}}}$

الحل :

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{e^{-x}}}}\,\frac{1}{2\sqrt{\cos\sqrt{e^{-x}}}}\left(-\sin\sqrt{e^{-x}}\right)\frac{e^{-x}(-1)}{2\sqrt{e^{-x}}}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{e^{-x}}\tan\sqrt{e^{-x}}$$

$(viii)\quad y = \ln\ln\ln x \quad ; \ (x > e)$

الحل :

$$y' = \frac{1}{\ln\ln x}\,\frac{1}{\ln x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)}$$

$(ix)\quad y = 3e^x + \ln(\tan x) \ ; \ (0 < x < \frac{\pi}{2})$

الحل :

$$(iv)\quad y=(f(x))^{g(x)}\quad ;\ (f(x)>0)$$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على : $\ln y=g(x)\ln f(x)$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y}y'=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

وعليه فإن :

$$y'=(f(x))^{g(x)}\{g'(x)\ln f(x)+\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)\}$$

إذن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{g(x)}g'(x)\ln f(x)+g(x)(f(x))^{g(x)-1}f'(x)}$$

ملاحظة :

فى المثال السابق بوضع $u=f(x)\ ;\ v=g(x)$ فإن العلاقة السابقة تأخذ الصورة :

$$\boxed{\frac{d}{dx}[u^{v}]=u^{v}.v'(\ln u)+v.u^{v-1}.u'}$$

وهذا القانون يوضح أنة لإيجاد المشتقة الأولى لدالة آسية فى صورها العامة أى التى تتكون من كمية متغيرة مرفوعة لأس متغير فإن المشتقة الأولى لها هى مجموع دالتين الأولى تفاضل الدالة المعطاة كما لو كان الأساس ثابت والثانية تفاضل الدالة المعطاة كما لو كان الأس ثابت.

$$(v)\quad y=x^{\sin x}\quad ;\ (x>0)$$

الحل :

وبما أن $z = x^{\ln x}$. إذن بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$$\ln z = \ln x \ln x = (\ln x)^2$$

إذن $\frac{1}{z} z' = 2(\ln x)\frac{1}{x}$. أي أن $z' = x^{\ln x} \frac{2\ln x}{x}$

وعليه فإن $y' = z' + 3x^2 = \frac{2\ln x}{x} x^{\ln x} + 3x^2$

(vii) $y = x^{3^x}$

الحل :

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على : $\ln y = 3^x \ln x$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{1}{y} y' = 3^x \frac{1}{x} + 3^x (\ln 3) \ln x$$

وعليه فإن $y' = y[\frac{3^x}{x} + 3^x (\ln 3) \ln x]$

أى أن

$$y' = x^{3^x} 3^x [\frac{1}{x} + (\ln 3) \ln x]$$

(viii) $y = x^{\sin x} + e^{2\sin e} + 3^{\tan x}$; $(x > 0)$

الحل :

$$y' = x^{\sin x} (\cos x) \ln x + (\sin x) x^{\sin x - 1} + 0$$
$$+ 3^{\tan x} (\sec^2 x) \ln 3$$
$$= x^{\sin x} [(\cos x) \ln x + \frac{\sin x}{x}] + 3^{\tan x} (\sec^2 x) \ln 3$$

مثال (٤. ٢. ١١) :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية :

$$(i)\ \ y=e^{\sin 2x}+\ln(\cos x)\ \ ;\ \ x\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=e^{\sin 2x}(2\cos x)+\frac{(-\sin x)}{\cos x}=2e^{\sin x}\cos x-\tan x$$

$$(ii)\ \ y=x^{\tan x}+3^{\sin x}+\ln(1+x^2)^3$$

الحل :

من المعلوم أنه لأي دالة $u>0$ فإن $u=e^{\ln u}$. إذن الدالة المعطاة تأخذ الصورة :

$$y=e^{\tan x\ln x}+3^{\sin x}+3\ln(1+x^2)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=e^{\tan x\ \ln x}\ (\tan x(\frac{1}{x})+\sec^2 x\ \ln x)$$

$$+3^{\sin x}(\cos x)\ln 3+3\frac{2x}{1+x^2}$$

$$=x^{\tan x}(\frac{\tan x}{x}+\sec^2 x\ln x)$$

$$+3^{\sin x}(\cos x)\ln 3+\frac{6x}{1+x^2}$$

$$(iii)\ y=\log_4(3x^2+7)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2+7}(6x)\frac{1}{\ln 4}=\frac{6x}{(3x^2+7)\ln 4}$$