نفرض أن A يمثل الحدث الحصول على أوجه متشابهة .

$$A=\{HHH,TTT\}$$

كما نفرض أن B يمثل الحدث الحصول على صورة على القطعة الأولى .

$$\therefore B=\{HHH,HHT,HTH,HTT\} \Rightarrow P(B)=4/8$$

وبالتالى فإن :

$$A\cap B=\{HHH\} \Rightarrow P(A\cap B)=1/8$$

$$\therefore P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/8}{4/8}=1/4$$

مثـــــــال (١٣) : ظهر حـــديثاً تصنيف لطلاب الجامعة فوجد أن 10% من الطلاب يدخـــنون وأن 30% من الطلاب يشـــربون القهـــوة ، وأن 5% من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة .

أ ـ إحسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة .

ب ـ من بين الطلاب المدخنين . ما هى نسبة الطلاب الذين يشربون القهوة ؟

جـ ـ من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة . ما هى نسبة المدخنين ؟

الحـــــــل

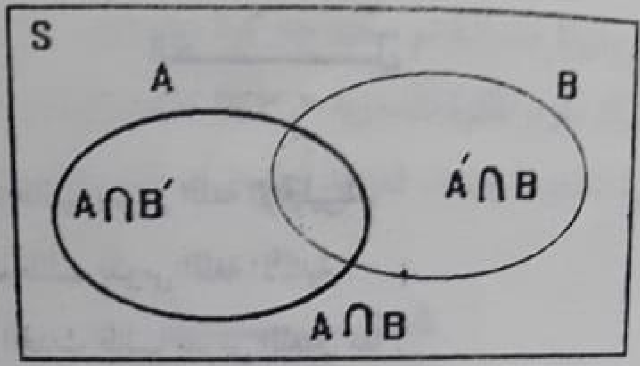
نفرض أن A يمثل الحدث طالب يدخن ، B الحدث طالب يشرب القهوة

$$\therefore P(A)=10/100 \quad , \quad P(B)=30/100 \quad , \quad P(A\cap B)=5/100$$

أ ـ نحاول حساب $P(A'\cap B')$ وذلك بإستخدام قانون ديمورجان كالآتى :

$$\begin{aligned} P(A'\cap B') &= P(A\cup B)' = 1-P(A\cup B) \\ &= 1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)] \\ &= 1-10/100-30/100+5/100=0.65 \end{aligned}$$

أى أن 65% من الطلاب لا يدخنون ولا يشربون القهوة .



ومن الشكل نلاحظ أن :

$$A=(A\cap B')\cup(A\cap B) \quad \text{and} \quad B=(A'\cap B)\cup(A\cap B)$$

وبما أن الحدثان $(A\cap B)$ و $(A\cap B')$ متنافيان ،

كما أن الحدثان $(A\cap B)$ و $(A'\cap B)$ متنافيان أيضا .

$$\text{Then} \quad p(A)=p(A\cap B')+p(A\cap B) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{and} \quad p(B)=p(A'\cap B)+p(A\cap B) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالجمع (1) ، (2) نجد أن :

$$p(A)+p(B)=p(A\cap B')+p(A'\cap B)+2p(A\cap B) \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{But} \quad p[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=p(A\cap B')+p(A'\cap B) \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

بالتعويض من العلاقة (3) في العلاقة (4) نجد أن :

$$p[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=p(A)+p(B)-2\,p(A\cap B)$$

مثال : من بين 500 طالب في معهد اللغات ، 380 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية ، 100 يدرسون اللغة الألمانية ، 40 من بينهم يدرسون الإنجليزية والألمانية . أوجد إحتمال أن يدرس الطالب :

(أ) الإنجليزية أو الألمانية

(ب) لا إنجليزية ولا ألمانية .

(جـ) اختير طالب بطريقة عشوائية فوجد أنه يدرس الإنجليزية . فما هو إحتمال أن يدرس هذا الطالب اللغة الألمانية .

$$\text{Also} \quad p(E_2/A) = \frac{p(A/E_2)\,p(E_2)}{p(A)} = \frac{L_2 n_2}{L_1 n_1 + L_2 n_2}$$

ولكي تكون الآلة الأولى أفضل من الثانية ، يجب أن تكون نسبة التالف من إنتاج الأولى أقل من نسبة التالف من إنتاج الثانية . أي أن :

$$p(E_1/A) < p(E_2/A) \;\Rightarrow\; L_1 n_1 < L_2 n_2$$

****

(٩) ثلاث فصول في كل منها 30 طفلاً . أطفال الفصل الأول كلهم أولاد ، وأطفال الفصل الثاني كلهن بنات ، أما أطفال الفصل الثالث فنصفهم أولاد . أختير فصلاً بطريقة عشوائية ومنه أختير طفلاً .

(أ) فما هو إحتمال أن يكون الطفل المختار ولد ،

(ب) إذا علم أن الطفل المختار ولد . فما هو إحتمال أن يكون من الفصل الأول .

الحـــــــــل

نفرض أن :

A_1 يمثل الحدث الطفل المختار من الفصل الأول ،

A_2 يمثل الحدث الطفل المختار من الفصل الثاني ،

A_3 يمثل الحدث الطفل المختار من الفصل الثالث ،

B يمثل الحدث الطفل المختار ولد .

$$\text{Then} \quad p(A_i) = \frac{1}{3} \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{And} \quad p(B/A_1) = 1 \quad , \quad p(B/A_2) = 0 \quad , \quad p(B/A_3) = \frac{1}{2}$$

مثـــال (١٠) : إذا كان إحتمال أن يعانى شخص من أثر سيئ نتيجة الحقن بمحلول معين هو 0.002 ، فما هو إحتمال أن يكون من بين 1000 شخص أختيروا من بين الأشخاص الذين حقنوا .

(i) خمسة بالضبط يعانون من أثر سيئ .

(ii) خمسة على الأكثر يعانون من أثر سيئ .

(iii) خمسة على الأقل يعانون من أثر سيئ .

الحـــــل

نفـــرض أن x عـــدد الأشـــخاص الذين يعانـــون رد الفعل السيئ . ويكون $n = 1000$ ، $p = 0.002$.

أى أن x تتبع توزيع ذى الحدين بمعالم n , p . وبالتالى فإن :

$$p(x) = \binom{1000}{x}(0.002)^x(0.998)^{1000-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \cdots, 1000$$

نلاحظ أن حساب أى إحتمال بإستخدام هذه الحالـة عملية شاقة جداً ، لذلك سوف نستخدم توزيع بواسون كتقريب .

حيث أن : $n = 1000$ ، $p = 0.002$ ⇐ $\lambda = np = 2$. وبالتالى فإن :

$$p(x) = \frac{e^{-2}\, 2^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \cdots, \infty$$

(i) إحتمال أن يعانى خمسة أشخاص رد الفعل السيئ هو :

$$p(x = 5) = \frac{e^{-2}\, 2^5}{5!} = 0.036$$

(ii) إحتمال أن يعانى خمسة أشخاص على الأكثر هو :

$$p(x \le 5) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) = 0.981$$

(iii) إحتمال أن يعانى خمسة أشخاص على الأقل هو :

$$p(x \ge 5) = 1 - p(x < 5) = 1 - \left[p(x \le 5) - p(x=5)\right] = 0.055$$

مثـــــــال (١١) : إذا كان هناك 300 خطأ مطبعى موزعة عشوائياً على كتاب به 500 صفحة . أوجد إحتمال أن يكون بإحدى الصفحات :

(i) خطآن مطبعيان .

(ii) خطآن مطبعيان على الأكثر .

الحـــــــل

حيث أن الأخطاء موزعة عشوائياً على 500 صفحة ، فسوف ننظر على أن عدد الأخطاء فى الصفحة على أنه عدد مرات النجاح ، $n = 300$. أى أن إحتمال أن يكون هناك خطأ فى أى صفحة هو :

$$p = \frac{1}{500} = 0.002 \quad \text{i.e.} \quad \lambda = np = (300)(0.002) = 0.6$$

نفرض أن x يمثل عدد الأخطاء فى الصفحة :

$$\text{Then} \quad p(x) = \frac{e^{-0.6}(0.6)^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \cdots, \infty$$

(i) إحتمال أن يكون بإحدى الصفحات خطآن هو :

$$p(x=2) = \frac{e^{-0.6}(0.6)^2}{2!} = 0.6$$

$P(X \le 2) = P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) = 0.977$

تكون المحاولات المكررة مستقلة .

مثـــــــال (٢) : إذا كانت نسبة التدخين فى إحدى المجتمعات هى 0.60 أخذت عينة مكونة من 20 فرد . إحسب الإحتمالات الآتية : (i) عدد المدخنين فى هذه العينة يساوى 2 (ii) ولا شخص يدخن . (iii) على الأكثر شخصان يدخنان .

الحـــــــــل

من الواضح أن أى شخص له نتيجتان فقط إما مدخن أو غير مدخن ولذلك سوف نستخدم توزيع ذى الحدين فى حساب الإحتمالات المطلوبة .

Since $n = 20 \quad , \quad p = 0.60 \;\Rightarrow\; q = 1 - p = 0.40$

then $p(x) = \binom{20}{x}(0.60)^{x}(0.40)^{20-x}$

(i) If $x = 2 \Rightarrow p(2) = \binom{20}{2}(0.60)^{2}(0.40)^{18}$

(ii) If $x = 0 \Rightarrow p(0) = \binom{20}{0}(0.60)^{0}(0.40)^{20}$

(iii) If $x \le 2 \Rightarrow p(x \le 2) = p(0) + p(1) + p(2)$

وبحساب هذه القيم ينتج الإحتمالات المطلوبة .

الحــــــل

فرض أن : A يمثل الحدث قطعة صالحة ،

B_1 يمثل الحدث العامل الأول يختبرها ،

B_2 يمثل الحدث العامل الثانى يختبرها .

Then $p(B_1) = \frac{6}{10}$, $p(B_2) = \frac{4}{10}$,

And $p(A/B_1) = \frac{94}{100}$, $p(A/B_2) = \frac{98}{100}$

يكون الحل باستخدام قاعدة بايز كالآتى :

$$p(B_1/A) = \frac{p(A/B_1)\,p(B_1)}{p(A/B_1)\,p(B_1) + p(A/B_2)\,p(B_2)}$$

$$= \frac{(94/100)(6/10)}{(94/100)(6/10) + (98/100)(4/10)} = 0.59$$

****

****

****

****

*****

***

*

(i) إحتمال أن يكون الطفل المختار ولد هو :

$$p(B)=\sum_{i=1}^{3}p(A_i)\,p(B/A_i)=\frac{1}{3}\left(1+0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(ii) فى هذه الحالة نستخدم قاعدة بايز كالآتى :

$$p(A_1/B)=\frac{p(A_1)\,p(B/A_1)}{p(B)}=\frac{(1/3)(1)}{1/2}=\frac{2}{3}$$

هذه هى الإجابة الصحيحة للسؤال ، ولكن إذا كان هناك شخص غير معتاد على مسائل الإحتمالات فإنه يمكن أن يناقش المسألة بشكل آخر كالآتى :

طالما أن الطفل المختار ولد فلابد أن يكون من الفصل الأول أو الفصل الثالث ، وعليه فإن إحتمال أن يكون الطفل من الفصل الأول يساوى " نصف " . بالطبع هذا الأسلوب فى المناقشة غير صحيح لأنه لم يلاحظ أن عدد الأولاد فى الفصل الأول ضعف عدد الأولاد فى الفصل الثالث . وعليه فإن إحتمال أن يكون الولد من الفصل الأول اكبر من إحتمال أن يكون من الفصل الثالث .

****

(٧) قطع تصنع فى مصنع وتوجه لإختبار صلاحيتها بواسطة إثنين من العمال ، فإذا كان إحتمال أن توجه القطعة إلى العامل الأول هو 60% ، والعامل الثانى هو 40% . وإحتمال أن تكون القطعة صالحة بشرط إختبارهابواسطة العامل الأول هو 94% وبواسطة العامل الثانى هو 98% . فإذا كانت القطعة فى نهاية الإختبار صالحة . أوجد إحتمال أن تكون هذه القطعة أختبرت بواسطة العامل الأول .

(٥) آلتان تنتجان نوعاً واحداً من القطع بحيث يكون التالف من إنتاج الآلة الأولى $L_1\%$ ونسبة التالف من إنتاج الآلة الثانية $L_2\%$. فإذا كان إنتاج الآلة الأولى في اليوم الواحد هو n_1 من الصناديق ، والثانية هو n_2 وكانت جميعها متشابهة تماماً من حيث العبوة والشكل . سحب أحد الصناديق بطريقة عشوائية وأخذت منه قطعة فوجدت تالفة . إحسب إحتمال أن الصندوق مسحوب من إنتاج الآلة الأولى وأوجد فرصة ترجيح الآلة الأولى على الثانية .

الحل

نفرض أن : A يمثل الحدث سحب قطعة تالفة من أحد الصناديق ،

E_1 يمثل الحدث إنتاج الآلة الأولى ،

E_2 يمثل الحدث إنتاج الآلة الثانية .

Then $p(E_1) = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}$, $p(E_2) = \dfrac{n_2}{n_1 + n_2}$

And $p(A/E_1) = L_1/100$, $p(A/E_2) = L_2/100$

فيكون المطلوب هو :

$$p(E_{1}/A) = \frac{p(A/E_1)\, p(E_1)}{p(A)}$$

But

$$p(A) = p(A/E_1)\, p(E_1) + p(A/E_2)\, p(E_2)$$

$$= \frac{L_1}{100} \cdot \frac{n_1}{n_1+n_2} + \frac{L_2}{100} \cdot \frac{n_2}{n_1+n_2} = \frac{L_1 n_1 + L_2 n_2}{100(n_1+n_2)}$$

Then

$$p(E_{1}/A) = \frac{p(A/E_1)\, p(E_1)}{p(A)} = \frac{L_1}{100} \cdot \frac{n_1}{n_1+n_2} \Big/ \frac{L_1 n_1 + L_2 n_2}{100(n_1+n_2)}$$

$$= \frac{L_1 n_1}{L_1 n_1 + L_2 n_2}$$

...ونا أحد الصناديق بطريقة عشرائية ثم سحبنا منه كرة عشوائياً :

ا- فما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء إذا علمت أنها من الصندوق الأول ،

ا- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء ، فما هو إحتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الثانى .

الحـــــــل

...رض أن : R يمثل الحدث سحب كرة حمراء ،

W يمثل الحدث سحب كرة بيضاء ،

E_1 يمثل الحدث سحب الصندوق الأول ،

E_2 يمثل الحدث سحب الصندوق الثانى

ا- لإيجاد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء إذا علمت أنها من الصندوق الأول نلاحظ أن :

$$p(E_i) = \frac{1}{4} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Then $p(R/E_1) = 4/10$ and $p(R/E_2) = 3/10$

ا- نلاحظ أن هذا المطلوب يُحسب بإستخدام قانون الاحتمال الكلي وقاعدة بايز كالآتى :

$$\text{Since} \quad p(W) = p(W/E_1)\,p(E_1) + p(W/E_2)\,p(E_2) + p(W/E_3)\,p(E_3) + p(W/E_4)\,p(E_4)$$

$$= \frac{1}{4}(6/10 + 7/10 + 5/10 + 4/10) = \frac{11}{20}$$

$$\text{Then} \quad p(E_2/W) = \frac{p(W/E_2)\,p(E_2)}{p(W)} = \frac{(7/10)(1/4)}{11/20} = 7/22$$

****

الحـــــــل

نفرض أن A يمثل الحدث طالب يدرس اللغة الإنجليزية ،

B يمثل الحدث طالب يدرس اللغة الألمانية .

وبالتالى فإن $A \cap B$ هو الحدث طالب يدرس اللغتين معاً .

Then $p(A) = \frac{380}{500}$, $p(B) = \frac{100}{500}$, $p(A \cap B) = \frac{40}{500}$

(أ) إحتمال أن يدرس الطالب إنجليزية أو ألمانية هى :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{380 + 100 - 40}{500} = \frac{440}{500} = \frac{22}{25}$$

(ب) إحتمال أن لايدرس الطالب إنجليزية و لا ألمانية هى :

$$p(A' \cap B') = p(A \cup B)' = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{22}{25} = \frac{3}{25}$$

(جـ) نلاحظ هنا فى هذه الحالة أن الإحتمال شرطى ، وبالتالى فإن :

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{40/500}{380/500} = \frac{2}{19}$$

****

(٤) أربعة صناديق يحتوى كل صندوق منها على مجموعة متماثلة من الكرات فيما عدا اللون كما بالجدول الآتى :

الصندوق / اللون	الأحمر	الأبيض
الأول	4	6
الثانى	3	7
الثالث	5	5
الرابع	6	4

تمـــاريـــن محلولـــة

(١) لأى ثلاث أحداث A , B , C من فراغ العينة S فإن :

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

الحـــل

$$D=B\cup C$$

$$p(D)=p(B\cup C)=p(B)+p(C)-p(B\cap C) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$p(A\cup D)=p(A)+p(D)-p(A\cap D) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$p(A\cap D)=p[A\cap(B\cup C)]=p[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

$$=p(A\cap B)+p(A\cap C)-p(A\cap B\cap C) \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

بالتعويض من العلاقتين (1) ، (3) فى العلاقة (2) نجد أن :

$$p(A\cup D)=p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)$$

$$=-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

****

(٢) إذا كان A , B حدثان من فراغ العينة S . أثبت أن :

$$p[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=p(A)+p(B)-2\,p(A\cap B)$$

الحـــل

للتوضيح نرسم شكل فن الآتى :

ب ـ نحسب $P(B/A)$ كالآتى :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{5/100}{10/100} = 0.50$$

أى أن 50% من الطلاب المدخنين يشربون القهوة .

جـ ـ نحاول حساب $P(A/B')$ كالآتى :

$$P(A/B') = \frac{P(A\cap B')}{P(B')}$$

وباستخدام قوانين المجموعات نجد أن :

$$A\cap B' = A-(A\cap B)$$

$$\therefore P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$$

ونظل لأن :

$$P(A/B') = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(B')}$$

$$= \frac{10/100 - 5/100}{70/100} = \frac{5/100}{70/100} = 5/70 = 0.071$$

أى أن 7.1% فقط من الطلاب الذين لا يشربون القهوة مدخنون .

الحوادث المستقلة Events

إذا كان

مثـــــــال (١٠) : إذا علمت أن الرقم 3 لم يظهر عند إلقاء زهرة النرد مرة واحدة . فما هو إحتمال أن يكون الرقم الذى حصلنا عليه رقماً فردياً .

الحـــــــل

حيث أن فراغ العينة هو :

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

نفرض أن A يمثل الحدث عدم ظهور الرقم 3 .

$$\therefore A\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow P(A) = 5/6$$

ونفرض أن B يمثل الحدث الحصول على رقم فردى .

$$\therefore B = \{1,3,5\}$$

والمطلوب هو إيجاد :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

وحيث أن :

$$A\cap B = \{1,5\} \Rightarrow P(A\cap B) = 2/6$$

$$\therefore P(B/A) = \frac{2/6}{5/6} = 2/5$$

مثـــــــال (١١) : أعلن عن وظيفة فتقدم لها 100 شخص ورتبت بياناتهم كالآتى :

النوع \ الحالة	متزوج	أعزب
ذكر	40	10
أنثى	10	10

مؤهلين

متزوج	أعزب
3	12
10	5

غير مؤهلين

ـب الإحتمالات الآتية :

١ ـ أن يكون الموظف المختار متزوج ومؤهل .

٢ ـ أن يكون الموظف المختار متزوج بشرط أن يكون مؤهل .

٣ ـ أن يكون الموظف المختار متزوج بشرط أن يكون غير مؤهل .

الحـــــــل

ـرض أن A يمثل الحدث إختيار موظف متزوج .

B الحدث إختيار موظف مؤهل .

ـليكن وأن B' يمثل الحدث إختيار موظف غير مؤهل .

$$\therefore P(A) = 63/100 \quad , \quad P(B) = 70/100 \quad , \quad P(B') = 30/100$$

$$(1) \quad P(A \cap B) = \frac{50}{100} = 0.50$$

$$(2) \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{50/100}{70/100} = 5/7$$

$$(3) \quad P(A/B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{13/100}{30/100} = 13/30$$

ـســـال (١٢) : ما هو إحتمال الحصول على أوجه متشابهة لدى إلقاء ثلاث قطع ـمعاً . إذا علمت أنه ظهرت صورة على القطعة الأولى لدى إلقائها ؟

الحـــــل

ـان فراغ العينة لهذه التجربة هو :

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$