بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الدوال الخــاصة

كلية التربية – الفرقة الثالثة (الرياضيات – الكيمياء – الفيزياء)

المحاضرة التاسعة والعاشرة

دالة شيبــشيف

د. هدي حمدان مرداش

2020

Chebyshev Polynomials (book page 71)

حل المعادلة التفاضلية

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

يسمي كثيرات الحدود شيبشيف.

- كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الأول T_n

$$T_n = y = \cos(n \cos^{-1} x)$$ (تحفظ)

- كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني U_n

$$U_n = y = \sin(n \cos^{-1} x)$$ (تحفظ)

ملحوظة: الاثبات غير مطلوب

تذكر الدوال المثلثية الاتية:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\text{Sin } 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

- $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
- $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- If none of the angles x, y and $(x \pm y)$ is an odd multiple of $\frac{\pi}{2}$, then

  $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

- $$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

- If none of the angles x, y and $(x \pm y)$ is a multiple of π, then

  $$\cot(x+y) = \frac{\cot x\cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

- $$\cot(x-y) = \frac{\cot x\cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

- $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

Chebyshev Polynomials

$T_n = y = \cos(n \ \cos^{-1} x)$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الأول نقوم بالتعويض عن قيم n كالأتي:
(بفرض أن $x = \cos\theta$, $\theta = \cos^{-1} x$)   (لاحظ ان أي T_n تكون بدلالة
$\cos\theta$ ثم تحول بدلالة x)

n = 0, $T_0(x) = \cos 0 = 1$

n = 1, $T_1 = \cos(\cos^{-1} x) = x$

n = 2, $T_2 = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$

n = 3, $T_3 = \cos 3\theta$

$= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\cos\theta \sin\theta)\sin\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta \sin^2\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1 - \cos^2\theta)$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x.$

n = 4, $T_4 = \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2x^2-1)^2 - 1$

$= 8x^4 - 8x^2 + 1$

وهكذا يمكن الحصول علي .... $T_5, T_6, T_7,$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الثاني نقوم بالتعويض عن قيم n
كالأتي: (بفرض أن $x = \cos\theta$ **,** $\theta = \cos^{-1}x$**)**
(لاحظ أن اي U_n تكون بدلالة $\sin\theta$ ثم تحول بدلالة x)

كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني U_n

$$U_n = y = \sin(n \cos^{-1} x)$$

$\mathbf{n = 0}$, $U_0\ (x) = \sin 0 = 0$

$\mathbf{n = 1}$, $U_1 = \text{Sin}\,(\cos^{-1} x) = \sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\,\theta} = \sqrt{1 - x^2}$

$\mathbf{n = 2}$, $U_2 = \sin\ 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta = 2\,x\ \sqrt{1 - x^2}$

$\mathbf{n = 3}$, $U_3 = \sin\ 3\theta = \sin\,(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta\ \cos\theta\ \cos\theta + (2\,cos^2\,\theta - 1)\sin\ \theta$

$= 2\sin\theta\,cos^2\,\theta + 2\,cos^2\,\theta\,\sin\ \theta - \sin\ \theta$

$= 4\sin\theta\,cos^2\,\theta - \sin\ \theta$

$= 4\sin\theta\,(1 - sin^2\,\theta\,) - \sin\ \theta$

$= 3\sin\theta - 4\,sin^3\,\theta$

$= \sin\theta\,(3 - 4\,sin^2\,\theta)$

$= \sqrt{1 - x^2}\,(4\,x^2 - 1)$

n	T_n	U_n
0	1	1
1	X	$\sqrt{1 - x^2}$
2	$2x^2$ -1	2x$\sqrt{1 - x^2}$
3	$4x^3 - 3$ x	$\sqrt{1 - x^2}$ $(4\ x^2 - 1)$

هذا الجدول للتوضيح وليس للحفظ. حيث يمكن أستنتاج أي قيمة كما سبق بتوضيح بعض الأمثلة.

n = 4, $T_4 = \cos\ 4\theta = \ 2\, cos^2\, 2\theta\ - 1 = 2\,(2x^2 - 1)^2\ - 1$

$= 8x^4\ - 8x^2 + 1$

و هكذا يمكن الحصول علي ... $T_5, T_6, T_7,$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الثاني نقوم بالتعويض عن قيم n
كالأتي: (بفرض أن $x = \cos\theta$, $\theta = \cos^{-1} x$**)**

كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني U_n

$$U_n = y = \sin\,(n\ \cos^{-1} x)$$

n = 0, $U_0\ (x) = \sin 0 = 0$

n = 1, $U_1\ = \mathrm{Sin}\,(\cos^{-1} x)\ = \ \sin\theta = \sqrt{1\ - cos^2\,\theta} = \sqrt{1\ -\ x^2}$

n = 2, $U_2 = \sin\ 2\theta = 2\sin\theta\ \cos\theta = 2\,x\ \sqrt{1\ -\ x^2}$

n = 3, $U_3 = \sin\ 3\theta = \ \sin\,(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta\ \cos\theta$

طريقة أخري للحصول علي قيم دالة شيبشيف من النوع الأول وذلك من خلال المحدد الأتي (من السهل جدا حفظه)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For n = 1 $\quad T_1(x) = x$

For n = 2 $\quad T_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - 1$

For n =1

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For n =2

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For n = 3

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For n = 4

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

The generating function of $T_n(x)$ is $\dfrac{\mathbf{1-2z}}{\mathbf{1-2x\,z+z^2}}$

Keep it, the proof for reading

لاحظ أن: دالة شيبشيف دالة في متغير واحد x

أما الدالة المولدة لدالة شيبشيف فهي دالة في متغريين (x, z)

Orthogonality of $T_n(x)$

1. $\int_{-1}^{1} \frac{T_n T_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \qquad if\ m \neq n$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{T_n T_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad if\ m = n \neq 0$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{T_n T_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \qquad if\ m = n = 0$

الاثبات سهل جدا واضح في الكتاب لشعبة الرياضيات

Examples for orthogonality of $T_n(x)$

1. $\int_{-1}^{1} \frac{T_3 T_2 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{T_7 T_{11} \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{T_2 T_2 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2},$

4. $\int_{-1}^{1} \frac{T_0 T_0 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi,$

Orthogonality of $U_n(x)$

1. $\int_{-1}^{1} \frac{U_n U_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \qquad if\ m \neq n$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{U_n U_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad if\ m = n \neq 0$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{U_n U_m \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \qquad if\ m = n = 0$

الاثبات أيضا سهل جدا واضح في الكتاب لشعبة الرياضيات

Recurrence Relations

1. $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$
2. $\left(1 - \ x^2\right)T'_n = n\,T_{n-1} - nx\,T_n$
3. $U_{n+1} + \ U_{n-1} = 2x\,U_n$
4. $\left(1 - \ x^2\right)U'_n = n\,x\,U_n - n\,U_{n-1}$

1. $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$

Proof

$$T_n(x) = cos(n \cos^{-1} x)$$

$$\theta = \cos^{-1} x \text{ , } \cos\theta = x$$

$$T_n(x) = cos(n\,\theta)$$

$$T_{n+1}(x) = cos\big((n+1)\theta\big)$$

$$= cos(n\theta)cos\theta - sin(n\theta)sin\,\theta$$

$$T_{n-1}(x) = cos\big((n-1)\theta\big)$$

$$= cos(n\theta)cos\theta + sin(n\theta)sin\theta$$

$\therefore\ T_{n+1} + T_{n-1} = 2cos\theta\ cos(n\theta) = 2xT_n.$

$$2.\ (1-x^2)T'_n = n\,T_{n-1} - nx\,T_n$$

$$T_n(x) = \cos(n\ \cos^{-1} x)$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$T'_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\,T'_n(x) = n \sin n\theta$$

بالضرب في $\sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)T'_n = n\sqrt{1-x^2}\,\sin n\theta$$

$$(1-x^2)T'_n = n \sin\theta\,\sin n\theta$$

$$= n\,T_{n-1} - nx\,T_n$$

$$;\ T_{n-1}(x) = \cos\big((n-1)\theta\big) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$= x\,T_n + \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$\sin(n\theta)\sin\theta = T_{n-1} - x\,T_n$$

بالنسبة لاثبات (3) بنفس طريقة (1) و(4) بنفس طريقة (2) ولكن باستخدام النوع الثاني.

دالة شيبشيف تعتبر أسهل الدوال من حيث العلاقات والاثبات والمسائل.

مطلوب من جميع الشعب الأمثلة المحلولة فقط.

يوجد الكثير من الدوال الخاصة مثل الدالة الفوق زائدية والدالة الهرميتية وغيرها الكثير. ولكن كما هو واضح لكم فان طريقة التعامل مع الدوال الخاصة لا تختلف كثيراً عن بعضها.

نلتقي بيكم علي خير. وأتمني لكم جميعاً دوام

الصحة والعافية .

كل عام وانتم بخير

ودمتم سالمين

مع أطيب الرجاء بالنجاح والتوفيق