المحددات والمصفوفات

DETERMINANTS & MATRICES

أولاً : المحددات

تعريف المحدد :

يسمى التعبير المختصر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ المكون من صفين وعمودين بمحدد من الرتبة الثانية والكميات a_{22} ، a_{21} ، a_{12} ، a_{11} عناصر المحدد .

ويعرف مفكوك المحدد من الرتبة الثانية كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال (١) : مفكوك المحدد Δ التالي يكون :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (1)\times(5)-(4)\times(-3)=5+12=17$$

بالمثل يسمى التعبير المختصر
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

المكـــون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة بمحدد من الرتبة الثالثة وتسمى الكميات

$a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\dots,\ a_{33}$ بعناصر المحدد .

بصـــورة عامة المحدد من الرتبة r يتكون من r من الصفوف و r من الأعمدة وعدد العناصر فيه تساوي $(r\times r)$

ويكون مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة كما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

حيث A_{11} , A_{12} , A_{13} هي المحددات الصغرى المناظرة للعناصر a_{11} , a_{12} , a_{13} على الترتيب ويكون A_{11} على سبيل المثال هو المحدد من الرتبة الثانية الناتج من حذف الصف والعمود الموجود فيه العنصر a_{11} من المحدد الأصلي (أي بحذف الصف الأول والعمود الأول) نحصل علي :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وبالمثل يكون A_{12} , A_{13} هي المحددات من الرتبة الثانية التالية :

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

مثال (٢) : أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 7(2\times 3 - 2\times 6) - 9(5\times 3 - 2\times 4) + 4(5\times 6 - 2\times 4)$$

$$= 7(-6) - 9(7) + 4(22) = -17$$

مثال (٣) : حل المعادلة

$$\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 9 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 3x \end{vmatrix}$$

الحل :

بإيجاد مفكوك المحددين في طرفي المعادلة :

$$2x(x+3) - 45 = 5(3x) - 52$$

$$2x^2 + 6x - 45 = 15x - 52$$

$$2x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$(2x-7)(x-1) = 0$$

$$x = 3.5 \quad , \quad x = 1$$

ملاحظة

يمكن إيجاد مفكوك المحدد من الرتبة الثالثة باستخدام عناصر أي صــف أو أي عمود مع المحددات الصغرى المرافقة له ومراعاة قاعدة الإشارات التالية :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال (٤) : أوجد قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر الصف الثاني .

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left[(1)(-1)-(-1)(2)\right] + 2\left[(1)(-1)-(-1)(5)\right] - 1\left[(1)(2)-(1)(5)\right]$$
$$= -2(1) + 2(4) - 1(-3)$$

$$= -2 + 8 + 3 = 9$$

مثال (٥) : أوجد قيمة

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

وذلك بفك المحدد بعناصر الصف الثاني ثم بعناصر العمود الثاني وتحقق من أن القيمتين متساويتين .

الحل :

(1) إشارات عناصر الصف الثاني هي − , + , − وعليه يكون قيمة المحدد بفكه من عناصر الصف الثاني كما يلي :

$$\Delta = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(2\times1-3\times1)+1(1\times1-3\times2)-2(1\times1-2\times2)$$

$$= 1-5+6=2$$

(2) إشـــارات عناصر العمود الثاني هي − , + , − وعليه يكون قيمة المحدد بفكه من عناصر العمود الثاني كما يلي :

$$\Delta=-2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-2(1\times1-2\times2)+1(1\times1-2\times3)-1(1\times2-3\times1)$$

$$=6-5+1=2$$

وواضح أن قيمة المحدد واحدة في الحالتين .

فيما سبق عرفنا المحدد من الرتبة الثانية والمحدد من الرتبة الثالثة ويمكـن بـنفس الطـريقة تعـريف محددات ذات رتبة أعلى كالرابعة والخامسـة وهكـذا . فمـثلاً يمكـن تعريف محدد الرتبة الرابعة بدلالة محـددات الرتبة الثالثة ومحددات الرتبة الخامسة بدلالة محددات الرتبة الرابعة وهكذا في جميع الحالات يجب أن تراعى قاعدة الإشارات .

بصـورة عامـة يمكن إيجاد مفكوك أي محدد من أي رتبة وذلك باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود مع المحددات الصغرى المناظرة له ومراعاة قاعدة الإشارات التالية حيث تكون الإشارة المناظرة للعنصر a_{ij} هي $(-1)^{i+j}$ فمثلاً إشارة a_{23} هي $-=(-1)^{2+3}$ كما أن إشارة a_{22} هـي $+=(-1)^{2+2}$ وهـذه القاعدة لا تستخدم إلا عند إيجاد قيمة المحدد .

تمارين

(١) فك المحددات التالية :

1) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$

(٢) أوجد قيمة كل من المحددات التالية :

1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 25 & 11 \\ 7 & 32 & 21 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & 7 & -3 \\ 5 & 2 & -9 \end{vmatrix}$

(٣) أثبت ما يلي :

1) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 18$

(٤) بدون فك المحددتين أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

(٥) حل المعادلة :

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(٦) أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

(٧) استخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات الآتية :

(i)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(iii)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

ثانياً : المصفوفات

تعـــريف المصـــفوفة : أي تنظـــيم من الأعداد على شكل m من الصـــفوف و n من الأعمدة يسمي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ وتسمى الأعداد المكونة للمصفوفة عناصر المصفوفة .

علـــى ســـبيل المثال : المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ لها صفين وثلاثة أعمدة فهي مصفوفة من الرتبة 2×3 .

والمصـــفوفة $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ لهـــا ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الرتبة 3×2 .

بعض المصفوفات الخاصة

(١) المصفوفة المربعة

وفيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة أي أن $m=n$.

على سبيل المثال المصفوفة $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 .

(٢) مصفوفة الصف

وتحتوي على صف واحد $m=1$

على سبيل المثال : $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة 1×4 .

(٣) مصفوفة العمود

وتحتوي على عمود واحد $n=1$.

على سبيل المثال : $D=\begin{bmatrix}-7\\3\\10\end{bmatrix}$ مصفوفة عمود من الرتبة 3×1 .

ملاحظات

(١) المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد وسيلة للتخزين والتعامل مع مجموعة من الأعداد .

(٢) المصـــفوفة التـــي جميع عناصرها تساوي صفراً تسمى المصفوفة الصفرية .

(٣) يرمز لكل عنصر من عناصر المصفوفة بالرمز a_{ij} حيث i هو رقم الصف الذي يقع فيه العنصر ، j هو رقم العمود الذي يقع فيه العنصر .

فعلى سبيل المثال : بفرض أن : $A=\begin{bmatrix}2&3&5\\-1&2&0\end{bmatrix}$

فـــإن $a_{11}=2$, $a_{23}=0$ وهكذا . وعلى ذلك تأخذ المصفوفة A ذات عدد الصفوف m وعدد الأعمدة n الشكل التالي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(٤) الخـــط القطري في المصفوفة المربعة A من الرتبة $n\times n$ المكون من العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ يسمى قطر المصفوفة .

وتســـمى المصـــفوفة المربعة التي فيها كل عنصر من عناصر القطر لا يساوي صفراً بينما بقية العناصر تساوي الصفر بالمصفوفة القطرية .

(٥) تســـمى المصـــفوفة المربعة من الرتبة $n\times n$ التي عناصر قطرها يساوي كل منها 1 وبقية العناصر تساوي صفراً بمصفوفة الوحدة I_n .

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

جبر المصفوفات

(١) تساوي المصفوفات

تتســاوى المصفوفتان A , B إذا كانتا من نفس الرتبة وكان كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

مثال (١) : إذا كان $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل من x , y .

الحل :

من تساوي المصفوفات فإن $x=0 \ , \ y=-7$.

(٢) جمع المصفوفات

لتكن A,B مصفوفتان من نفس الرتبة $m \times n$ (أي أن لهما نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة) فإن حاصل جمعهما $A+B$ هــو مصفوفة C من نفس الرتبة وكل عنصر من المصفوفة C ينتج م ن

مجمــوع نظيريه في المصفوفتين B , A وعلى ذلك فإن حاصل جمع A و B يعرف كما يلي :

إذا كانت B , A هما المصفوفتان

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$C=A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال (٢) : أوجد حاصل جمع المصفوفتين :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+7 & 4-1 & -6+4 \\ 0+2 & -1+1 & 2+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : يمكن جمع أي عدد من المصفوفات من نفس الرتبة .

(٣) ضرب المصفوفة في عدد حقيقي k

حاصل ضرب عدد حقيقي k في مصفوفة من الرتبة $m\times n$ هو مصفوفة من نفس الرتبة وعناصرها هي عناصر المصفوفة الأصلية وكل منها مضروب في العدد الحقيقي k .

وعلى ذلك إذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m\times n$ كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن kA هو :

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

ملاحظة : لا تتأثر رتبة المصفوفة عند ضربها بعدد ثابت ، فالمصفوفة kA من الرتبة $m\times n$ أيضا .

مثال (٣) : $7\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 28 & -7 & 21 \\ 14 & 35 & -42 \end{bmatrix}$

(٤) طرح المصفوفات

حاصل طرح المصفوفتان A,B اللتان لهما نفس الرتبة يعرف كما يلي :

$$A-B=A+(-1)B$$

مثال (٤) : أوجد $A-B$ إذا كان : $A=\begin{bmatrix} 17 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

الحل :

$$A-B=\begin{bmatrix}17 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}18 & -1\\0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18 & 1\\0 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 3\\3 & -1\end{bmatrix}$$

ملاحظة : عند طرح مصفوفة من مصفوفة أخرى لها نفس الرتبة فإنه يتم طرح كل عنصر من العنصر المناظر له .

مثال (٥) : إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\7 & -5 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-8 & 12 & 4\\7 & 3 & -1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & -15 & 10\\0 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة D حيث $D=2A-B+\frac{1}{5}C$

الحل :

$$D=2\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\7 & -5 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-8 & 12 & 4\\7 & 3 & -1\end{bmatrix}+\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & -15 & 10\\0 & 5 & 25\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 6 & -4\\14 & -10 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -12 & -4\\-7 & -3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & -9 & -6\\7 & -12 & 6\end{bmatrix}$$

مثال (٦) : إذا كانت : $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & -4\\-6 & -1\end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة X بحيث $4(B-X)=X+B+2A-C$

الحل :

$$4(B-X)=X+B+2A-C$$

$$4B-4X=X+B+2A-C$$

$$5X=3B-2A+C$$

$$5X=3\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -4\\-6 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 9\\-9 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -4\\-6 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(٥) ضرب المصفوفات

تعـريف : إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ و B هي مصفوفة مــن الرتبة $n\times L$ (أي أن عدد الأعمدة في A يساوي عدد الصفوف في B) فإنهما تقبلان الضرب في بعضهما ويكون حاصل الضرب مصفوفة $C=AB$ (بالترتيـب مــن اليسار إلى اليمين) من الرتبة $m\times L$ ويكون العنصر c_{ij} في المصفوفة C الموجود في الصف رقم i والعمود رقم j يســاوي مجمــوع حاصــل ضــرب كــل عنصر في الصف رقم i في المصـفوفة A فــي العنصــر المقابل في العمود رقم j في المصفوفة B وهكذا .

مثال (٧) : أوجد حاصل الضرب AB للمصفوفتين A و B إذا كان :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \; , \; B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

الحل :

عدد أعمدة A = عدد صفوف B = 2

إذن يمكن إيجاد AB ويكون

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\therefore \; AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

ونلاحظ أن المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب $C=AB$ عدد صفوفها يساوي عدد صفوف المصفوفة A وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة المصفوفة B .

مثال (٨) : إذا كان : $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد حاصل الضرب AB .

الحل :

$$AB=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix} 7\times3+3\times(-1)+4\times2 & 7\times5+3\times1+4\times3 \\ (-1)\times3+5\times(-1)+2\times2 & (-1)\times5+5\times1+2\times3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 26 & 50 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ملاحظة : من تعريف الضرب السابق نجد أنه إذا تحقق شرط الضرب في ترتيب الضرب AB فقد لا يتحقق في الترتيب BA أي أن :

$$AB \neq BA$$

مثال (٩) : إذا كان : $B=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 6 & -4 & 3\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

أوجد AB وأبحث إيجاد BA .

الحل :

أولاً : حاصل الضرب AB ممكن

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}-1 & 5 & 7\\ 6 & -4 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+18 & 5-12 & 7+9\\ -5+24 & 25-16 & 35+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}17 & -7 & 16\\ 19 & 9 & 47\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ثانيـــاً : حاصل الضرب BA غير ممكن حيث أن عدد أعمدة B يساوي 3 بينما عدد صفوف A يساوي 2 .

مثال (١٠) : إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}$$

أوجد AB وأبحث إيجاد BA .

الحل :

أولاً : حاصل الضرب AB ممكن

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}1+3+0 & -2-5-8\\ 0-9+0 & 0+15-16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -15\\ -9 & -1\end{bmatrix}_{2\times2}$$

ثانيا : حاصل الضرب BA أيضا ممكن

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\\ 0 & -4\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+0 & -1-6 & 2-8 \\ -3+0 & 3+15 & -6+20 \\ 0+0 & 0-12 & 0-16 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -7 & -6 \\ -3 & 18 & 14 \\ 0 & -12 & -16 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

لاحظ أن $AB \neq BA$

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي على الصورة

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

تسمى بالمصفوفة القطرية وفي الحالة الخاصة إذا كانت $\alpha_i = 1 \ , \ i = 1,2,3,\ldots,n$ فإن المصفوفة تسمى **بمصفوفة الوحدة** ويرمز لها عادةً بالرمز I_n أي :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

(١) حاصـــل ضـــرب مصفوفة الوحدة في أي مصفوفة من نفس الرتبة يساوي نفس المصفوفة .

فعلى سبيل المثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(٢) يرتبط بالمصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويجب ألا نخلط بين هذين المفهومين فالمصفوفة عبارة عن مجموعة مرتبة من الأعداد مكتوبة في صورة جدول (مستطيل) ومحددها $\det A$ هو عدد يتحدد وفقاً لقواعد المحددات .

(٣) المصفوفة المربعة تسمى مصفوفة غير مفردة إذا كان محددها لا يساوي الصفر .

وبالعكس إذا كان محدد المصفوفة يساوي الصفر فإنها تسمى مصفوفة مفردة أو مصفوفة شاذة .

علـى سبيل المثال المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ تكون غير مفردة حيث $\det A = 23$. بينما المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ تكـون مفـردة حيـث $\det B = 0$.

تمارين

(١) أحسب $AB-BA$ إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

(٢) أوجد $f(A)=A^2-5A+3I$ حيث $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$

(٣) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 5\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & -7\\ -1 & 2\\ 0 & 4\end{bmatrix} ,$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي :

(أ) $A+B$ (ب) $C+D$ (ج) $A-B$

(د) $\left(A^T\right)^T$ (هـ) $2A-4B$ (و) $(C-D)^T$

(٤) أثبت أن $(A+B)^T = A^T + B^T$

(٥) إذا كان $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

أوجد AB

(٦) أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات التالية :

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

المجموعات
SETS

٢-١ مقدمة Introduction

يعد مفهوم المجموعة من المفاهيم الأساسية في الرياضيات الحديثة، وهـو من البساطة بحيث يمكن إدراكه في حياتنا اليومية من خلال الحديث عن أفـراد الأسرة، أو من خلال محتويات الشقة، أو من خلال طلاب الفرقة بالمدرسـة، أو من خلال أعضاء فريق كرة القدم بالمدرسة .... الخ.

إننا أمام شيء مكون من عدة أفراد ، وقد اتفق على تسمية هذا الشـيء بالمجموعة Set ، أما الأفراد فتسمى عناصر ، ولقـد كـان العـالم الألمـاني Cantor(١٨٤٥-١٩١٨) أول من اعتبر المجموعة مفهوماً أساسياً يتميـز بمـا يلي:ـ

(١) المجموعة مفهوم رياضي قائم بذاته ،ويختلف عن مفهوم الأفراد التي تكونـه، فالحديث مثلاً عن باقة من الزهور (حتى لو كانت مكونة من زهرة واحدة) يختلف عن حديثنا عن تلك الزهرة.

(٢) العناصر متباينة في أي مجموعة، أي لايتكرر ظـهور أي عنصـر داخـل المجموعة.

(٣) التحديد الجيد للمجموعة، بحيث يمكن الحكم على عنصر ما فيما إذا كـان منتمياً لمجموعة ما، أو لا ينتمي، بطريقة سهلة وواضحة لا لبس فيـها ولا غموض، ولا يختلف الحكم على ذلك من شخص لآخر، حيث مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين 3 ، 12 هي مجموعة رياضية، أما مجموعـة

الكرماء في بلد ما فهي لا تمثل مجموعة رياضية ،حيث وصف الشخص بالكرم قد يختلف من شخص لآخر، كذلك مجموعة الأعداد الصحيحة التي هي أكبر بكثير من 12 لا تمثل مجموعة رياضية، حيث لا يتفق اثنان في الحكم على العنصر 30 مثلاً من حيث الانتماء من عدمه إلى تلك المجموعة.

ومن المتفق عليه أن نرمز للمجموعات بالأحرف الكبيرة A ، B ، C ،... الخ. والعناصر (elements or members) بالأحرف الصغيرة a ، b ، c ،...الخ. كما اتفق على أن يتم التعبير عن أي مجموعة بكتابة كل عناصرها بين قوسين رياضيين، مع وضع فاصلة بين كل عنصر ، فمثلاً المجموعة المكونة من العناصر x ، y ، z نعبر عنها هكذا:

$$A = \{x, y, z\}$$

مع ملاحظة أن المجموعة لا تتأثر بترتيب العناصر في الظهور، فمثلاً

$$B = \{1,2,3,4\} = \{4,2,3,1\}$$

كما نعبر عن انتماء عنصر ما وليكن x لمجموعة ما، ولتكن A كما يلي:

$$x \in A$$

أو نقول إن قيمة انتماء العنصر x للمجموعة A تساوي 1، أي أن

$$A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$$

ونعبر عن عدم انتماء عنصر ما وليكن h لمجموعة ما ،ولتكن A هكذا

$$h \notin A$$

أو نقول إن قيمة انتماء العنصر h للمجموعة A تساوي صفراً، أي

$$A(h) = 0 \Leftrightarrow h \notin A$$

٢ـ٢ طرق تعيين المجموعات :

يمكن تعيين المجموعات بإحدى الطرق الآتية :

(١) كتابة كل عناصر المجموعة إن أمكن ذلك، مثل

$$A = \{x, y, g, *\}$$

(٢) كتابة بعض عناصرها فقط مع وضع ثلاث نقاط بعد تلك العناصر للإشارة إلى أن هناك عناصر قد حذفت ويمكن التعرف عليها بسهولة من خلال ما أدرج من عناصر.

(٣) الاكتفاء بالصفة المميزة التي من خلالها يمكن الحكم فيما إذا كان شيئاً مـــا هو عنصر من عناصر تلك المجموعة أم لا، أي إذا كانت $P(x)$ خاصيـــة تميز x فإن مجموعة كل العناصر x التي تصح لها الخاصية $P(x)$ تكتـــب كما يلي:

$$\{x : P(x)\}$$

أي مجموعة كل العناصر x التي تحقق الخاصية $P(x)$.

مثال ٢ـ٢ـ١ :

نفرض أن $A = \{3,6,9,...\}$ من الواضح أنه يمكن الحكم علـــى أي عنصر فيما إذا كان منتمياً لتلك المجموعة من عدمه، فمثلاً العدد 24 ينتمـــي إلى A، لأنه موجب، ويقبل القسمة على 3، بينما العـــدد 13 لا ينتـــمـــي إلى A، وكذلك العدد 24- لأنه ســـــالب.لكن $B = \{3,16,99,...\}$ لاتعد مجموعة لأنها تفتقد للتحديد الجيد لعناصرها حيث وعلى سبيل المثال لايمكـــن الحكم عما إذا كان العنصر 5 منتميا لتلك المجموعة من عدمه.

مثال ٢ـ٢ـ٢:

إن أكثر المجموعات استعمالاً خلال هذا الكتاب هي المجموعات العددية والتي نذكر بعضاً منها وكذلك الرمز المحدد لكل مجموعة على النحو التالي:

(١) مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N = \{1,2,3,\ldots\}$$

(٢) مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً إليها الصفر:

$$N_o = \{0,1,2,3,\ldots\}$$

(٣) مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$$

(٤) مجموعة الأعداد النسبية :

$$Q = \{q : q = a/b \ , a \in Z , b \in N\}$$

(٥) مجموعة الأعداد الحقيقية R.

(٦) مجموعة الأعداد المركبة :

$$C = \{a : a = x + iy, x, y \in R\}$$

٢-٣ المجموعة الخالية Empty Set

تعريف ٢ـ٣ـ١:

إذا حددت مجموعة ما بخاصية معينة، واتضح أنه لا يوجد أي عنصر يحقق تلك الخاصية فإننا نقول: إن تلك المجموعة هي مجموعة خالية، ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\ \}$، وقيمة إنتماء أي عنصر لتلك المجموعة تساوى 0.

مثال ٢-٣-١ :

$$\phi = \{x : x \in R, x^2 < 0\} \quad ، \quad \phi = \{x : x \neq x\}$$

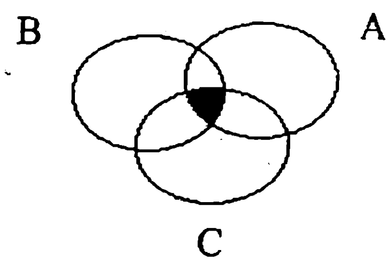
يجب ملاحظة أن أي مجموعتين خاليتين تكونان متساويتين، حيث إنه لا توجد سوى مجموعة خالية واحدة فقط.

تعريف ٢-٣-٢ :

تسمى المجموعة مجموعة أحادية (singleton) إذا احتوت فقط على عنصر واحد مثل المجموعة $\{x\}$.

٢-٤ مخططات ڤن Venn

وضع جون ڤن عام ١٨٨٠ م المخطط الموضح في شكل (١)، وفيه استبدل مجموعة أشياء بمناطق من المستوى، فالمنحنى A يمثل الناس الفرنسيين، والمنحنى B يمثل الجنرالات ، والمنحنى C يمثل الذين يحملون ميداليات. بسهولة



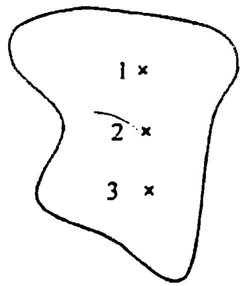
شكل (١)

من خلال هذا المخطط نستطيع أن نحدد العلاقة بين تلك المجموعات، فمثلاً المنطقة الداكنة تمثل الفرنسيين الجنرالات الذين يحملون ميداليات، ويستفاد من

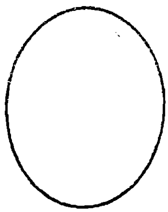
مخطط فن في إيضاح كثير من قضايا نظرية المجموعات ،حيث تمثـــل المجموعـــة بمنحنى مغلق والذي يسمى مخطط فن.

مثال ٢ـ٤ـ١ :

المجموعة $A=\{1,2,3\}$ تمثل بمخطط فين بالشكل (٢) ، كمـــا تمثـــل المجموعة الخالية بالشكل (٣) .



شكل (٢)



شكل (٣)

٢ــ٥ المجموعة الجزئية والاحتواء Subset and containing

تعريف ٢ــ٥ــ١ :

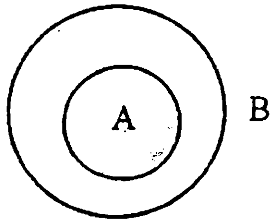
يقال إن المجموعة A مجموعـــة جزئية (subset) مـــن المجموعـــة B، وتكتب $A\subseteq B$ إذا كان كل عنصر في A هو أيضاً في B، أي أن

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\in A \rightarrow x\in B)$$

ويمكن التعبير عن الاحتواء بطريقة أخرى على النحو التالي :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x\notin B \rightarrow x\notin A)$$

ويمكن تمثيل احتواء المجموعة B للمجموعة A من خلال مخطط فين كما هو بشكل (٤).



شكل (٤)

ملحوظة:

لأي مجموعات A ، B ، C يتحقق الآتي :

(i) $A \subseteq A$,
(ii) $\phi \subseteq A$,
(iii) $A \subseteq \phi \Leftrightarrow A = \phi$,
(iv) If $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

تعريف ٢ــ٥ــ٢ :

يقال إن المجموعتين A ، B متساويتان، إذا كــان $A \subseteq B, B \subseteq A$ ، ونكتب $A = B$ ، أي أن

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B, B \subseteq A)$$

ويقال إن A مجموعة جزئية خالصة أو فعلية (Proper subset) من B إذا كان $A \subseteq B, B \not\subseteq A$ ويرمز لها بالرمز $A \subset B$.

ملحوظة :

إن صحة $A \supseteq \phi$ تنتج من المبدأ المنطقي، ألا وهو أن الفرضية الكاذبــة تؤدي إلى أي نتيجة مهما كانت. وهكذا فالعبارة "$\text{if } x \in \phi \Rightarrow x \in A$" صادقة لأن $x \in \phi$ كاذبة دائماً.

تعريف ٢ــ٥ــ٣ :

يقال لمجموعة إنها منتهية أو محدودة إذا كانت محتوية على عدد محدود من العناصر، ويقال إنها لا نهائية أو غير محدودة إذا كانت محتوية على عدد غير محدود أو غير منته من العناصر. وإذا كانت المجموعة A منتهية فإن عدد عناصرها n يسمى رتبة المجموعة ويرمز له بالرمز $|A|$ ،ويسمى أحياناً العدد الكاردينالي ،ويرمز له بالرمز $n(A)$.

٢ــ٦ مجموعة القوة Power Set

تعريف ٢ــ٦ــ١:

إذا كانت X مجموعة غير خالية فإن المجموعة التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية من X تسمى مجموعة جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X أو بمجموعة قوة (power set) X ، ويرمز لها بالرمز $\mathrm{P}(X)$، أي أن

$$\mathrm{P}(X)=\{A : A \subseteq X\}$$

ويجب ملاحظة أن :

(i) $\phi \subseteq X \to \phi \in \mathrm{P}(X)$,
(ii) $X \subseteq X \to X \in \mathrm{P}(X)$,
(iii) If $x \in X \to \{x\} \in \mathrm{P}(X)$,
(iv) If $X=\phi \Rightarrow \mathrm{P}(X)=\{\phi\}$.

مثال ٢ــ٦ــ١ :

نفرض أن $X=\{a,b,c\}$ ،

$$\therefore \quad \mathrm{P}(X)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$$

نلحظ أن عدد عناصر المجموعة X هي $n = 3$ ، كما نلحظ أن عدد عناصر $P(X)$ تساوي $2^3 = 8$. أن هذه الملحوظة تدفعنا إلى النظرية التالية، والتي تحدد العلاقة بين عدد عناصر مجموعة منتهية، وعدد عناصر قوتها.

نظرية ٢ـ٦ـ١ :

لأي مجموعة منتهية تحتوي على n عنصر تكون عدد المجموعات الجزئية لها هي 2^n.

البرهان :

نفرض أن X مجموعة منتهية تحتوي على n عنصر، لحصر المجموعات الجزئية لها نتبع الآتي:

أول مجموعة جزئية من X هي ϕ .

عدد المجموعات الجزئية الأحادية هي $\binom{n}{1}$

عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصرين هي $\binom{n}{2}$

عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر هي $\binom{n}{3}$

$\vdots$

عدد المجموعات التي تحتوي على $n-1$ عنصر هي $\binom{n}{n-1}$

عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على n عنصر هي $\binom{n}{n}$

(لاحظ أن المجموعة X هي المجموعة الوحيدة التي تحتوي على n عنصر).

ولكن $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$

$\therefore$ عدد كل المجموعات الجزئية للمجموعة $X = 2^n$، أي أن

عدد عناصر $\mathrm{P}(X) = 2^n$

المثال التالي لنبين الاستخدام الصحيح للانتماء $(\in)$ والاحتواء $(\subseteq)$.

مثال ٢ـ٦ـ٢ :

إذا كانت $X=\{a,b,c\}$. بين الخطأ من الصواب فيما يلي :

(1) $\{a\} \in X$.

(2) $\{a,b\} \subset \mathrm{P}(X)$.

(3) $\{\phi\} \in \mathrm{P}(X)$.

(4) $\{\phi\} = \phi$.

(5) $\{a\} \subseteq \mathrm{P}(X)$.

(6) $\{a,b\} \subseteq X$.

(7) $\{\{a\}\} \subseteq X$.

(8) $\{d\} \subseteq X$.

الحل :

(1) $\{a\} \in X$ خطأ، والصحيح هو $\{a\} \subseteq X$.

(2) $\{a,b\} \subseteq \mathrm{P}(X)$ خطأ، والصحيح هو $\{a,b\} \in \mathrm{P}(X)$.

(3) $\{\phi\} \in \mathrm{P}(X)$ خطأ، والصحيح هو $\{\phi\} \subseteq \mathrm{P}(X)$.

(4) $\{\phi\}=\phi$ خطأ، والصحيح هو $\phi\in\{\phi\}$.

(5) $\{a\}\subseteq P(X)$ خطأ والصحيح هو $\{a\}\in P(X)$

(6) $\{a,b\}\subseteq X$ صواب.

(7) $\{\{a\}\}\in X$ خطأ والصحيح $\{\{a\}\}\subseteq P(X)$

(8) $\{d\}\subseteq P(X)$ خطأ، لأن $d\notin X$.

تعريف ٢ــ٦ــ٢:

المجموعة الشاملة (universal set) والتي يرمز لها بـــالرمز U هـــي المجموعة التي تحتوي كل المجموعات الواردة في مسألة معينـــة . أي إذا كـــانت A ، B ، C مجموعات معينة في دراسة معينة ، فإن المجموعة الشاملة لتلـــك المجموعات هي المجموعة التي تحتوى كل منهم . نلحظ أن أصغر مجموعة شـــاملة لمجموعات ما هي مجموعة أتحاد تلك المجموعات.

مثال ٢ـ٦ـ٣ :

نفرض أن A هي مجموعة طلاب قسم الرياضيات بكليـــة العلـــوم ، وأن B هي مجموعة طلاب قسم الحاسب الآلي، وأن C هي مجموعة طـــلاب قسم الفيزياء ،فإن المجموعة الشاملة لتلك المجموعات يمكن أن تكون على النحو التالي:

$U_1=$ { كل طلاب الكلية }

$U_2=$ { كل طلاب الجامعة }

رغم إمكانية إيجاد أكثر من مجموعة شاملة لعدد ما من المجموعـــات إلا أنه يجب اختيار مجموعة شاملة واحدة ،كما يجب الثبـــات علـــى هـــذا

الاختيار في الدراسة الواحدة، وسوف يتضح فيما بعد أهمية الثبات على المجموعة الشاملة الواحدة بعد اختيارها.

مثال ٢ـ٦ـ٤ :

أوجد بعض المجموعات التي تصلح كل منها كمجموعة شاملة للمجموعات الآتية:

$$A = \{1,2\}, B = \{2,3,4\}, C = \{3,4,5\}$$

الحل :

من الواضح أن $U_1 = \{1,2,3,4,5\}$ مجموعة شاملة للمجموعات A ، B ، C وهي أصغر مجموعة شاملة لتلك المجموعات، كما أن $U_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ هي مجموعة شاملة للمجموعات A ، B ، C. أيضا $U_3 = N$ مجموعة شاملة للمجموعات A ، B ، C، ويمكن إيجاد المزيد من المجموعات الشاملة للمجموعات A ، B ، C.

ملحوظة:

تتميز المجموعة الشاملة لعدد من المجموعات بما يلي :

(١) المجموعة الشاملة اختيارية بشرط احتوائها على المجموعات المطروحة في الدراسة.

(٢) المجموعة الشاملة قد تختلف من مسألة لأخرى.

(٣) ثبات المجموعة الشاملة في المسألة الواحدة.

(٤) قيمة انتماء أي عنصر للمجموعة الشاملة تساوي 1.

٢-٧ جبر المجموعات Algebra of Sets:

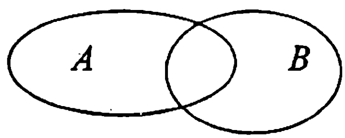
نتعرض الآن لبعض المفاهيم الهامة التي يمكن من خلالها تكوين مجموعة من مجموعات أخرى.

تعريف ٢-٧-١ :

مجموعة الاتحاد (union set) لمجموعتين غير خاليتين A و B ، والتي نرمز لها بالرمز $A \cup B$ تعرف كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

وهذا يعني أن عناصر مجموعة الاتحاد للمجموعتين A و B هي كل العناصر المنتمية للمجموعة A أو للمجموعة B أو للمجموعتين في الوقت نفسه.(انظر شكل (٥)).



$A \cup B$

شكل (٥)

ويمكن بناء جدول الانتماء للمجموعة $A \cup B$ كما هو بجدول (١)

A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

جدول (١)

لاحظ التطابق بين دالة الفصل "$\vee$" وعملية الاتحاد "$\bigcup$". كما نلحظ أيضاً أن العنصر يأخذ قيمة الانتماء 1 بالنسبة للمجموعة $A\bigcup B$ إذا وفقط إذا كان منتمياً لمجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين A و B ودون ذلك يأخذ قيمة الإنتماء 0 ، أي أن

$$x \notin A\bigcup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

<u>ملحوظة :</u>

لأي مجموعتين جزئيتين A ، B من المجموعة الشاملة U نلحظ الآتي :

(1) $A\bigcup B = B\bigcup A$

(2) $A\bigcup \phi = \phi\bigcup A$

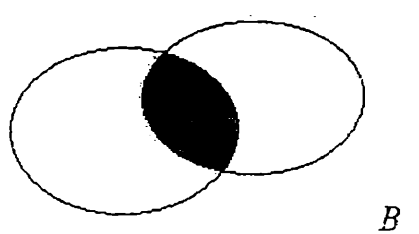
(3) $A\bigcup U = U$

<u>تعريف ٢ــ٧ــ٢ :</u>

مجموعة التقاطع (intersection set) لمجموعتين غير خاليتين A ، B نرمز لها بالرمز $A\bigcap B$ تعرف كما يلي:

$$A\bigcap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

وهذا يعني أن عناصر المجموعة $A\bigcap B$ هي تلك العناصر المشتركة بين المجموعتين A ، B ،(انظر شكل (٦)) .



$(A\bigcap B)$

شكل (٦)

يمكن بناء جدول الانتماء للمجموعة $A \cap B$ على النحو التالي:

A	B	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

جدول (٢)

لاحظ التطابق بين دالة الوصل " $\wedge$ " وعملية التقاطع "$\cap$". ويلحظ أيضاً أن العنصر يأخذ قيمة الانتماء 1، أي ينتمي للمجموعة $A \cap B$ إذا كان منتمياً للمجموعتين في الوقت نفسه، أي أن

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

كما أن

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

ملحوظة :

لأي مجموعتين غير خاليتين A و B من المجموعة الشاملة U، نلحظ الآتي:

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) $A \cap \phi = \phi \cap A = \phi$

(3) $A \cap U = A$

مثال ٢-٧-١:

بفرض أن : $A = \{x, y, z\}$ و $B = \{1, x, +, y\}$، أوجد

(i) $A \cap B$,

(ii) $A \cup B$.

الحل :

(i) $A \bigcup B = \{x, y, z, 1, +\}$.

(ii) $A \bigcap B = \{x, y\}$.

مثال ٢ـ٧ـ٢ :

إذا كان $A = \{x \in N : 3 \le x \le 12\}$ ، $B = \{x \in N : 5 < x < 15\}$

أوجد $A \bigcup B$ ، $A \bigcap B$.

الحل :

$$A \bigcup B = \{x \in N : 3 \le x < 15\} \ .$$

$$A \bigcap B = \{x \in N : 5 < x \le 12\} \ .$$

نظرية ٢ـ٧ـ١:

لأي مجموعتين A ، B يتحقق الآتي :

(1) $A \bigcap B \subseteq A \bigcup B$.

(2) $A \subseteq A \bigcup B, A \bigcap B \subseteq A$.

(3) if $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B, A \bigcap B = A$.

البرهان :

(1) Let $x \in A \bigcap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \bigcup B$

$\therefore \ A \bigcap B \subseteq A \bigcup B$

(2) Let $x \in A \Rightarrow x \in A \bigcup B \Rightarrow A \subseteq A \bigcup B$

Let $x \in A \bigcap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow (A \bigcap B) \subseteq A$

(3) if $A \subseteq B \Rightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

Let $x \in A \bigcup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \bigcup B \subseteq B$

لكن $B \subseteq A \cup B$

$\therefore \ A \cup B = B$

أيضاً ، $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$

ونعلم أن $A \supseteq A \cap B$

$\therefore \ A \cap B = A$

ومن السهل برهان الاتجاه العكسي .

ملحوظة :

يمكن إثبات تساوي مجموعتين من خلال جداول الانتماء وذلك عند تطابق قيم الانتماء المتناظرة لكليهما .

نظرية ٢ــ٧ــ٢ :

بفرض أن A ، B ، C مجموعات اختيارية، إذن:

(1) $A \cup A = A, A \cap A = A$

قانون اللانمو (Indempotent Law)

(2) $A \cup B = B \cup A$

قانون الإبدال (Commutative Law)

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

قانون الدمج (Associative Law)

(4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

قانون التوزيع (Distributive Law)

البرهان :

سوف نبرهن أجزاء النظرية بأكثر من طريقة.

(1) $A \cup A = A, \; A \cap A = A$

نكون جدول الانتماء لتلك المجموعات كما يلي :

A	$A \cup A$	$A \cap A$
1	1	1
0	0	0

جدول (٣)

بالنظر إلى جدول الانتماء نلحظ تطابق قيم الانتماء المتناظرة للمجموعات لآتية:

$$A, A \cup A, A \cap A$$
$$\therefore \; A \cup A = A, A \cap A = A$$

(2) $A \cup B = B \cup A$

سوف نبرهن هذا الجزء كما يلي:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

بموجب أن دالة الفصل "$\vee$" إبدالية.

$$\therefore \; A \cup B = \{x : x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$$

ولأن دالة الوصل أيضاً إبدالية ، فإنه يمكن إثبات أن $A \cap B = B \cap A$ بالطريقة نفسها.

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

برهان هذا الجزء يمكن أن يكون على النحو التالي:

$$A\cap(B\cap C)=\{x : x\in A\wedge x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x : x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\}$$

وبموجب أن دالة الوصل "$\wedge$" دامجة.

$$\therefore A\cap(B\cap C)=\{x :(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\}$$
$$=\{x : x\in A\cap B\wedge x\in C\}$$
$$=\{x : x\in(A\cap B)\cap C\}$$
$$=(A\cap B)\cap C$$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

أما هذا الجزء فسوف يبرهن من خلال بناء جدول الانتماء للمجموعة $A\cap(B\cup C)$ والمجموعة $(A\cap B)\cup(A\cap C)$، والتي سوف نرمز لها بالرمز α(انظر جدول (٤)).

A	B	C	$A\cap B$	$A\cap C$	$B\cup C$	$A\cap(B\cup C)$	α
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

جدول (٤)

بالنظر إلى العمودين الأخيرين بالجدول ؛ نلحظ تطابق قيم الانتمـــاء المتنـــاظرة للمجموعتين $(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap(B\cup C)$.

$$\therefore\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)$$

بالمثل يمكن إثبات أن $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

مثال ٢ـ٧ـ٣:

بفرض أن A ، B ، C ثلاث مجموعات غير خالية ، ناقش صحـــة العبارة التالية:

$$A\cup B\subseteq C\cup B \Leftrightarrow A\subseteq C$$

البرهان

الاتجاه $\Leftarrow$: نفرض أن $A\subseteq C$ أي أن $\forall x\in A\Rightarrow x\in C$

$$\therefore\ A\cup B\subseteq C\cup B$$

وذلك لأن

$$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in C\vee x\in B\Rightarrow x\in C\cup B$$

$$\therefore\ A\cup B\subseteq C\cup B$$

الاتجاه $\Rightarrow$: العلاقة ليست صحيحة عامة في هذا الاتجاه كما يتضح لنا ذلك من المثال التالي:

مثال ٢ـ٧ـ٤:

نفرض أن $A=\{2,3,4\}$ ، $B=\{1,2\}$ ، $C=\{3,4,5\}$

من السهل ملاحظة أن:

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}\subseteq C\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

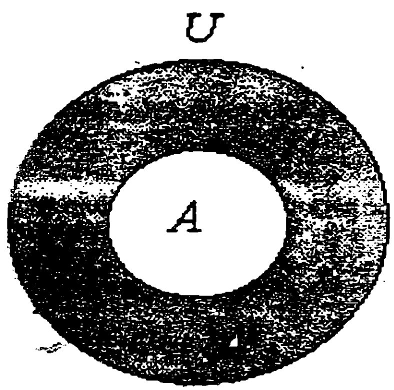
مع أن $A\not\subseteq C$.

٢-٨ متممة مجموعة Complement of a set

تعريف ٢ـ٨ـ١ :

نفرض أن A مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة الشاملة U. متممة (complement) المجموعة A بالنسبة للمجموعة الشاملة U والتي يرمز لهـــا بالرمز A^c هي مجموعة كل عناصر U غير المنتمية للمجموعة A ، أي أن

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$



شكل (٧)

مثال ٢ـ٨ـ١:

نفرض أن $A = \{1,5,6\}$ ، $B = \{2,3,4\}$ ، $U = N$.

$$\therefore \quad A^c = \{2,3,4,7,8,\ldots\}\ , \qquad B^c = \{1,5,6,\ldots\}$$

ملحوظة :

إذا كانت درجة انتماء العنصر x للمجموعة A تساوى 1، فـــإن درجة انتماء x للمجموعة A^c تساوى صفراً وعلى ذلك يمكن بناء جـــدول الانتماء لمتممة المجموعة على النحو التالي:

A	A^c
1	0
0	1

جدول (٥)

ونلاحظ تطابق جدول انتماء A^c بجدول صدق $\sim A$.

نظريه ٢ـ٨ـ١ :

بفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة U فإن :

(1) $U^c = \phi,\ \phi^c = U,$

(2) $(A^c)^c = A,$

(3) $A \cap A^c = \phi,$

(4) $A \cup A^c = U,$

(5) $\text{if } A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c,$

(6) $(A \cup B)^C = A^c \cap B^c$

(7) $(A \cap B)^C = A^c \cup B^c$

قانون دى مورجان

البرهان :

(1)
$$U^c = \{x \in U : x \notin U\} = \phi,$$
$$\phi^c = \{x \in U : x \notin \phi\} = U,$$

(2) سوف نبرهن أن $(A^c)^c = A$ عن طريق جدول الانتماء الآتي:

A	A^c	$(A^c)^c$
1	0	1
0	1	0

جدول (٦)

واضح أن $A=(A^c)^c$ وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة في العمودين الأول والأخير بجدول الانتماء،ومن جدول الانتماء الآتي:

A	A^c	$A\cap A^c$	$A\cup A^c$
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

جدول (٧)

نلحظ مايلي:

(i) أن قيم الانتماء للمجموعة $A\cap A^c$ كل منها أصفار، أي أن

$$A\cap A^c=\phi$$

(ii) وأن قيم الانتماء للمجموعة $A\cup A^c$ كل منها يساوى 1 ، أي أن

$$A\cup A^c=U$$

وبالتالي نصل إلى برهان الخاصيتين (3) ، (4) .

Let $A\subseteq B\Rightarrow(\forall x\notin B\Rightarrow x\notin A)$. (5)

Let $x\in B^c\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in A^c$

$$\therefore\ B^c\subseteq A^c$$

أي أن

(i) $$A\subseteq B\Rightarrow B^c\subseteq A^c$$

الاتجاه العكسي

Let $B^c\subseteq A^c\Rightarrow(\forall x\notin A^c\Rightarrow x\notin B^c)$.

Let $x\in A\Rightarrow x\notin A^c\Rightarrow x\notin B^c\Rightarrow x\in B$

$$\therefore\ A\subseteq B$$

أي أن

(ii) . $B^c \subseteq A^c \Rightarrow A \subseteq B$

من (i) ,(ii) نحصل على :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

لإثبات الخاصيتين 6 ،7 (قانون دي مورجان)، سوف نرمز للمجموعة $(A \cup B)^c$ بالرمز α، وللمجموعة $A^c \cap B^c$ بالرمز β، وللمجموعة $(A \cap B)^c$ بالرمز γ، وللمجموعة $A^c \cup B^c$ بالرمز δ في جدول الانتماء التالي :

A	B	A^c	B^c	$A \cup B$	$A \cap B$	α	β	γ	δ
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

جدول (٨)

نلحظ من قيم الانتماء بأعمدة الجدول أن $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ، وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة لهما،وللسبب نفسه نجد أن :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

يمكن إثبات الخاصيتين (6)، (7) من النظرية السابقة بطريقه أخري كما يلي :

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{x \in U : x \notin (A \cap B)\}\\ &= \{x \in U : x \notin A \vee x \notin B\}\\ &= \{x \in U : x \in A^c \vee x \in B^c\}\\ &= \{x \in U : x \in (A^c \cup B^c)\}\\ &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات الفقرة الثانية.

مثال ٢ـ٨ـ٢ :

بفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة U. نـاقش صحة العبارة الآتية :

$$A \cap B = \phi \Leftrightarrow A^c = B$$

البرهان :

الاتجاه $\Leftarrow$: نفرض أن $A^c = B$ ،

$$\therefore A \cap B = A \cap A^c = \phi$$

وعلى هذا فإن العلاقة في الاتجاه $\Leftarrow$ صحيحة .

الاتجاه $\Rightarrow$: العلاقة السابقة في هذا الاتجاه ليست صحيحه عامة كما سيتضح من المثال التالي :

مثال ٢ـ٨ـ٣ :

نفرض أن $U = \{1,2,3,4,5\}$ ، $A = \{1,2\}$ ، $B = \{3,4\}$. واضـح أن $A \cap B = \phi$ مع أن $A^c = \{3,4,5\} \neq B$.

مثال ٢ـ٨ـ٤ :

بفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة U . نـاقش صحة العلاقة الآتية :

$$A \cup B = U \Leftrightarrow A^c = B$$

البرهان :

الاتجاه $\Leftarrow$: نفرض أن $A^c = B$

$$\therefore\ A \cup B = A \cup A^c = U$$

$\therefore$ العلاقة في هذا الاتجاه صحيحة.

الاتجاه $\Rightarrow$: العلاقة السابقة ليست صحيحة عامة في هذا الاتجــــاه، كمـــا سيتضح من المثال التالي:

مثال ٢ـ٨ـ٥ :

نفرض أن $U = \{1,2,3,4,5\}$ ، $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{2,3,4,5\}$.

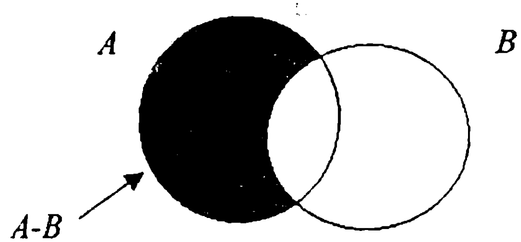
واضح أن $A \cup B = U$ مع أن $A^c = \{4,5\} \neq B$.

٢ــ٩ الفرق والفرق التناظري

تعريف ٢ــ٩ــ١ :

يعرف الفرق بين المجموعتين الجزئيتين A ، B والذي يرمز له بـــــالرمز $A-B$، أو $A \setminus B$ كما يلي :

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



شكل (٨)

ويمكن بناء جدول الانتماء لعملية الفرق كما يلي:

A	B	$A-B$	$B-A$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

جدول (٩)

واضح من الجدول أن عملية الفرق ليست إبدالية ،حيث $A-B \neq B-A$

مثال ٢ـ٩ـ١ :

بفرض أن $A=\{x \in R : x \geq 3\}$، $B=\{x \in R : 1 \leq x < 10\}$

$$\therefore\ A-B=\{x \in R : x \geq 10\},$$
$$B-A=\{x \in R : 1 \leq x < 3\}.$$

نظريه ٢ـ٩ـ١ :

بفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان . اثبت أن

(i) $A-B^c = A \cap B$,

(ii) $A^c - B^c = B - A$.

البرهان :

(i)
$$\begin{aligned} A-B^c &= \{x : x \in A \wedge x \notin B^c\} \\ &= \{x : x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x : x \in A \cap B\} \\ &= A \cap B , \end{aligned}$$

(ii)
$$A^c - B^c = \{x : x \in A^c \wedge x \notin B^c\}$$

$$=\{x : x \notin A \wedge x \in B\}$$
$$=\{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$
$$=\{x : x \in (B-A)\}$$
$$= B - A$$

برهان آخر :

يمكن إثبات النظرية السابقة عن طريق بناء جـــدول الانتمـــاء لتلـــك المجموعات كما يلي:

A	B	A^c	B^c	$A-B^c$	$A\cap B$	A^c-B^c	$B-A$
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0

جدول (١٠)

نلحظ من جدول الانتماء السابق أن $A - B^c = A \cap B$ ، وذلك لتطابق قيم الانتماء المتناظرة لكل من $A\cap B, A - B^c$ ، كما نلحظ أيضـــاً أن $A^c - B^c = B - A$ وذلك لتطابق قيم الأنتماء المتناظرة لهما.

لاستنتاج المزيد من العلاقات التي تربط عمليه الفرق بعمليتي الاتحـــاد والتقـــاطع نعرض جدول الانتماء الآتي وللاختصـــار نرمـــز للمجموعـــة $A\cap B$ بـــالرمز α، والمجموعة $A\cap C$ بالرمز β، والمجموعة $A\cup B$ بالرمز γ، والمجموعة $A\cup C$ بالرمز η، والمجمـــوعة $B\cup C$ بالرمـــــز λ، والمجمـــوعة $B\cap C$ الرمـــز μ، والمجـــموعة $A-B$ بالرمـــــز σ، والمجـــموعة $B-A$ بالرمـــــز τ والمجموعة $A-C$ بالرمز ρ ، والمجموعة $C-A$ بـــالرمز ξ، وأخـــيراً المجموعـــة $B-C$ بالرمز ζ.

A	B	C	α	β	γ	η	λ	μ	σ	τ	ρ	ξ	ζ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

جدول (١١)

أولاً: نستخلص الجدول الآتي من جدول (١١)

$A\cap(B-C)$	$(A\cap B)-(A\cap C)$	$(B-C)\cap A$	$(A\cap B)-C$
0	0	0	0
1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

جدول (١٢)

يتضح من الجدول السابق أن :

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)-C$$

وأن : $(B-C)\cap A=(B\cap A)-(C\cap A)$

أي أن عملية التقاطع توزيعية على عملية الفرق .

ثانيا : نستخلص جدول الانتماء الآتي من الجدول (١١)،مع ملاحظة أنه بناء على الرموز المتفق عليها فى الجدول سوف يكون :

$A\cup(B-C)=A\cup\zeta$ ، $(A\cup B)-(A\cup C)=\gamma-\eta$ ،

$A-(B\cup C)=A-\lambda$ ، $(A-B)\cup(B-C)=\delta\cup\zeta$ ،

$(B\cup C)-A=\lambda-A$ ، $(B-A)\cup(C-A)=\tau\cup\xi$.

$A\cup\zeta$	$\gamma-\eta$	$A-\lambda$	$\delta-\zeta$	$\lambda-A$	$\tau\cup\xi$
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

جدول (١٣)

نلحظ من الجدول السابق أن :

$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C),$$

$$(B-C)\cup A=A\cup(B-C)\neq(B\cup A)-(C\cup A)$$

أي أن عملية الاتحاد ليست توزيعية على عملية الفرق .

كما نلحظ أن :

$$A-(B\cup C)\neq(A-B)\cup(A-C),$$

$$(B\cup C)-A=(B-A)\cup(C-A)$$

أي أن عملية الفرق توزيعية على عملية الاتحاد من الناحية اليمنى فقط .

ثالثا : نستخلص جدول الانتماء الآتي من الجدول (١١)، وللاختصار وبنـاء على الرموز المتفق عليها سيكون :

$A-(B\cup C)=A-\lambda$ ، $(A-B)\cap(A-C)=\delta\cap\rho$ ،

$A-(B\cap C)=A-\mu$ ، $(A-B)\cup(A-C)=\delta\cup\rho$ ،

$(A-B)-C=\delta-C$ ، $(A-C)-B=\rho-B$.

$A-\lambda$	$\delta-\rho$	$A-\mu$	$\delta\cup\rho$	$\delta-C$	$\rho-B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

جدول (١٤)

نلحظ من الجدول السابق أن

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C),$$
$$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-B.$$

رابعاً: بالطريقة نفسها يمكن استخلاص جدول أنتماء من جدول (١١)، يوضح لنا أن :

$$(B\cup C)-A=(B-A)\cup(C-A),$$
$$(B\cap C)-A=(B-A)\cap(C-A).$$

أي أن عملية الفرق توزيعية من الناحية اليمنى على كل مـن عمليـه الاتحـاد وعمليه التقاطع.

ملحوظة :

(1) من السهل إثبات إحدى العلاقات السابقة بالطرق التقليدية، فعلى سبيل المثال سوف نقوم بإثبات أن :

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

وذلك على النحو التالي :

$$\begin{aligned} A-(B\cap C) &= \{x: x\in A\wedge x\notin(B\cap C)\}\\ &= \{x: x\in A\wedge(x\notin B\vee x\notin C)\}\\ &= \{x:(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\vee x\notin C)\}\\ &= \{x: x\in(A-B)\vee x\in(A-C)\}\\ &= \{x: x\in(A-B)\cup(A-C)\}\\ &= (A-B)\cup(A-C)\end{aligned}$$

(2) بالنسبة للعلاقات غير المحققة من خلال جداول الانتماء يمكن أن توضح من خلال أمثلة عكسية، فمثلا المثال الآتي يوضح أن

$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$$

مثال ٢ـ٩ـ٢ :

بفرض أن $A=\{a,b\},B=\{c,d\},C=\{e\}$ ، فإن:

(1) $$A\cup(B-C)=\{a,b,c,d\}$$

وأن

(2) $$(A\cup B)-(A\cup C)=\{c,d\}$$

من (1), (2) يتضح أن

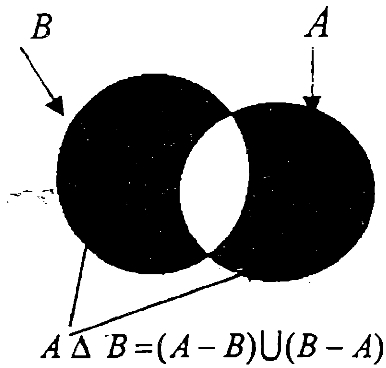
$$A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$$

تعريف ٢ــ٩ــ٢ :

الفرق التناظري للمجموعتين A ، B والذي نرمز له بـــالرمز $A \Delta B$

يعرف كما يلي:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



شكل (٩)

جدول الانتماء للفرق التناظرى للمجموعتين A و B هو كما يلي:

A	B	$A-B$	$B-A$	$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$
1	1	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

جدول (١٦)

وحيث إن عملية الاتحاد إبدالية فإن عملية الفرق التناظري إبدالية أيضاً أي أن:

$$A \Delta B = B \Delta A$$

ملحوظة :

نلحظ من جدول الانتماء (١٦) أن قيمة الانتماء للفـــــرق التنـــاظري تساوى 1 فقط عندما تختلف قيمتي الانتماء حول Δ .

مثال ٢ـ٩ـ٣ :

بفرض أن A ، B، C مجموعات جزئية ، اثبت الآتي:

(1) $A \Delta \phi = A$,   (2) $A \Delta A = \phi$,

(3) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

الإثبات :

(1) $A \Delta \phi = (A - \phi) \bigcup (\phi - A) = A \bigcup \phi = A$,

(2) $A \Delta A = (A - A) \bigcup (A - A) = \phi \bigcup \phi = \phi$.

سوف تتضح أهمية جداول الانتماء في إثبات الخاصية رقم (3)بطريقة غير مطولة وذلك على النحو التالي :

A	B	C	$A \Delta B$	$B \Delta C$	$A \Delta (B \Delta C)$	$(A \Delta B) \Delta C$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

جدول (١٧)

من تطابق قيم الانتماء المتناظرة في العمودين الأخيرين بالجدول، يتضح أن :

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

مثال ٢ـ٩ـ٤ :

لأي مجموعتين جزئيتين A ، B من المجموعة الشاملة U ، اثبت أن

$$A - B = A \bigcap B^c$$

البرهان :

$$A-B=\{x\in U : x\in A \wedge x\notin B\}$$
$$=\{x\in U : x\in A \wedge x\in B^c\}$$
$$=\{x\in U : x\in (A\cap B^c)\}$$
$$=A\cap B^c$$

مثال ٢ـ٩ـ٥ :

بفرض أن A ، B مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة U. اثبت أن :

(i) $A\cap(A^c\cup B)=A\cap B$,
(ii) $A\cup(B-A)=A\cup B$.

البرهان :

(i) $A\cap(A^c\cup B)=(A\cap A^c)\cup(A\cap B)$
$=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B$

(ii) $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap A^c)=(A\cup B)\cap(A\cup A^c)$
$=(A\cup B)\cap U=A\cup B$.

تمارين (٣)

(١) اكتب عناصر المجموعات الآتية :

(i) $A=\{x : x\in N, 0<x<10\}$,
(ii) $B=\{x : x\in N, x \text{ is odd}\}$,
(iii) $C=\{x : x\in Z, 2x^2+2x-12=0\}$,
(iv) $D=\{x : x\in N, (x-2)(x-3)(x-4)=0, x \text{ is even}\}$.

(٢) أوجد متممة كل مجموعة من المجموعات السابقة في (١).

(٣) إذا كانت

$$A = \{x \in R : -3 < x \leq 12\}$$
$$B = \{x \in R : 3 < x < 20\}$$
$$C = \{x \in N : 5 \leq x < 7\}$$

(i) $A \cup B$ (ii) $A - C$
(iii) $A \cap B$ (iv) $A \,\Delta\, B$
(v) $A \,\Delta\, C$ (vi) $B - C$

(٤) عين مجموعة شاملة للمجموعتين B,A في (٣)، ثم أوجد A^c ، B^c.

(٥) لأي مجموعتين جزئيتين A ، B أثبت أن :

(i) $A \cup B = (A \,\Delta\, B) \cup (A \cap B)$

(ii) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(٦) للمجموعات الجزئية A ، B ، C ، ناقش صحة العبارة الآتية :

$$A \cup B \subseteq C \cup B \wedge A \cap B \subseteq C \cap B \Leftrightarrow A \subseteq C$$

(٧) للمجموعتين الجزئيتين A ، B من المجموعة الشاملة U، أثبت أن

$$A \cup (A \cap B)^c = U$$

العلاقات
Relations

٣ـ١ حاصل الضرب الكارتيزى (الجداء الديكارتى) Cartisian Product

تعريف ٣-١-١ :

الـــزوج المرتب (x,y) (order pair) هو كـــائن رياضي مكون من العنصرين x ، y مأخوذين على الترتيب x ثم y، يسمى x العنصر الأول أو المركبة الأولى أو المسقط الأول للزوج المرتب، ويسمى y العنصـــر الثـــاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني للزوج المرتب.

من التعريف السابق نستطيع بسهولة ملاحظة أن :

(i) $x \neq y \Leftrightarrow (x,y) \neq (y,x)$,

(ii) $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$,

(iii) $(x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \vee y_1 \neq y_2$.

تعريف ٣ـ١ـ٢ :

حاصل الضرب الكارتيزى أو الجداء الديكارتى للمجموعتـــين A و B، والذي نرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مركبتـــها الأولى عنصر في A والمركبة الثانية عنصر في B، أي أن

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

عندما نستعمل مصطلح الجداء الديكارتى فمن المفهوم أن المجموعـــات المتضمنة هي غير خالية حتى وإن لم يذكر ذلك صراحة.

مثال ٣ـ١ـ١ :

بفرض أن $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{x,y\}$، فإن

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\},$$
$$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,1),(y,3)\}$$

واضح أنالعملية ليست إبدالية حيث

$$A \times B \neq B \times A$$

ملحوظة:

إذا كان عدد عناصر المجموعة A يساوى m، وعدد عناصر المجموعة B يساوى n فإن عدد عناصر المجموعة $A \times B$ يساوى $m.n$.

يمكن بناء جدول الانتماء للجداء الديكارتي، ولكن يجب أن نفهم أن المقارنة بين المجموعات يجب أن تكون على أساس قيم الانتماء للعنصر نفسه، فمثلا تطابق قيم الانتماء المتناظرة للمجموعتين $A \times B$ و $B \times A$ لا يعني التساوي حيث إن قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة $A \times B$ هي نسبة لانتماء الزوج المرتب (a,b) للمجموعة $A \times B$ من عدمه، أما قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة $B \times A$ فهي بالنسبة لانتماء الزوج المرتب (b,a) إلى المجموعة $B \times A$ من عدمه. ونعلم أن $(a,b) \neq (b,a)$ عامة وعليه فإن المقارنة مستبعدة لاختلاف عناصر الانتماء. ولتوضيح ذلك نقدم جدول الانتماء الخاص بالجداء الديكارتي $A \times B$، $B \times A$ (انظر جدول (١)).

A	B	$A \times B$	$B \times A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

جدول (١)

ملحوظه :

(١) قيم الانتماء في العمود الأول معتمدة على انتماء العنصر a إلى المجموعة A من عدمه. وقيم الانتماء بالعمود الثاني معتمدة على انتماء العنصر b إلى المجموعة B من عدمه.

(٢) رغم تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين الأخيرين فإن ذلك لا يعني أن $A \times B = B \times A$ لأختلاف عناصر الانتماء.

٣ـ٢ تمثيل الجداء الديكارتي :

يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بثلاثة طرق هي:

(أ) التمثيل الجدولي.

(ب) التمثيل السهمي .

(جـ) التمثيل البياني .

وسوف نبين كل طريقة من تلك الطرق من خلال المثال الآتي :

مثال ٣ـ٢ـ١ :

مثل الجداء الديكارتي للمجموعة $A \times B$ للمجموعتين A ، B اللتين بالمثال ٣-١-١.

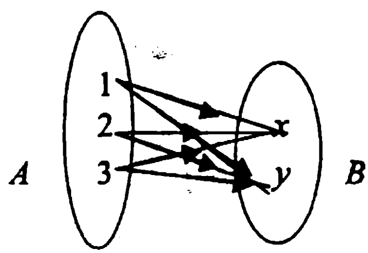
الحل :

(أ) التمثيل الجدولي للجداء الديكارتى $A \times B$ هو كما بالجدول الآتى :

$\times$	x	y
1	$(1,x)$	$(1,y)$
2	$(2,x)$	$(2,y)$
3	$(3,x)$	$(3,y)$

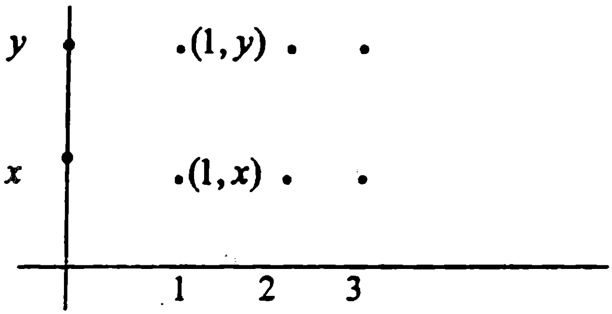
جدول (٢)

(ب) التمثيل السهمي للجداء الديكارتي $A \times B$ هو عبارة عن أسهم تخرج من كل عنصر من عناصر المجموعة A إلى كل عنصر من عناصر المجموعة B.



شكل (١)

(جـ) التمثيل البياني للجداء الديكارتي $A \times B$ هو عبارة عن تمثيل العناصر المكونة له بنقاط في المستوى الذي محوره الأفقي عناصر A، ومحوره الرأسي عناصر B، (انظر شكل (٢)).



شكل (٢)

نظرية ٣ ـ ٢ ـ ١

إذا كانت A ، B ، C مجموعات غير خالية، أثبت أن :

(i) $A\times\phi=\phi\times A=\phi$.

(ii) $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$.

(iii) $(B\bigcup C)\times A=(B\times A)\bigcup(C\times A)$.

(iv) $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$.

(v) $(B\bigcap C)\times A=(B\times A)\bigcap(C\times A)$.

البرهان :

(i) لإثبات ذلك نتبع الآتي :

نفرض جدلا أن $A\times\phi\neq\phi$ ، إذن يوجد زوج مرتب (a,b) بحيث

$(a,b)\in A\times\phi \Leftarrow b\in\phi$ وهذا تناقض.

$\therefore A\times\phi=\phi$ بالمثل $\phi\times A=\phi$

(ii) $$\begin{aligned} A\times(B\bigcup C) &= \{(x,y): x\in A\wedge y\in B\bigcup C\} \\ &= \{(x,y): x\in A\wedge[y\in B\vee y\in C]\} \\ &= \{(x,y): [x\in A\wedge y\in B]\vee[x\in A\wedge y\in C]\} \\ &= \{(x,y): (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in A\times C\} \\ &= \{(x,y): (x,y)\in(A\times B)\bigcup(A\times C)\} \\ &= (A\times B)\bigcup(A\times C) \end{aligned}$$

(iii) بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

يتضح مما سبق أن عمليه $\times$ توزيعية على $\cup$.

سوف نستخدم جدول الانتماء في إثبات الخاصيتين (iv), (v) وذلك بعد اعتبار أن $\xi=A\cap B$ ، $\zeta=A\times B$ ، $\mu=A\times C$ ، $\tau=B\times A$ ؛ $\rho=C\times A$ ، $\alpha=A\times(B\cap C)$ ، $\beta=(A\times B)\cap(A\times C)$ ، $\gamma=(B\cap C)\times A$ ، $\delta=(B\times A)\cap(C\times A)$ وذلك كما يلي:

A	B	C	ξ	ζ	μ	τ	ρ	α	β	γ	δ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

جدول (٣)

نلحظ من الجدول ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين الأخيرين أن

$$\gamma=\delta$$

أي أن

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين قبل الأخيرين يتضح أن

$$\alpha=\beta$$

أي أن

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

وهذا يعني أن $\times$ توزيعية على $\cap$.

ويجب ملاحظة أن التطابق تم بالنسبة لانتماء العنصر نفسه بالنسبة للطرفين.وعلى سبيل المثال فإن $A\times(B\cap C)\neq(B\cap C)\times A$ ، رغم تطابق قيم الانتماء المتناظرة؛ وذلك لأن قيم الانتماء للطرف الأيسر نسبة لانتماء العنصر (x,y) من عدمه، أما قيم الانتماء للطرف الأيمن فهي نسبة لانتماء العنصر (y,x) من عدمه .

ملحوظة :

(i) إذا كان $A=B$ فإن :

$$A\times B=A\times A=A^2$$

(ii) وإذا كان $A=B=R$ فإن :

$$A\times B=R\times R=R^2$$

وهو المستوى الكارتيزي ، ويمكن تعميم حاصل ضرب المجموعات على النحو التالي :

إذا كانت A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مجموعات اختيارية فإن حاصل ضربهما الديكارتي ، والذي نرمز له بالرمز $\prod_{i=1}^{n}A_i$ ، يعرف كما يلي :

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$$
$$=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n):a_i\in A_i\,\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$$

إذا كان $A_i=R$ لكل $i\in\{1,2,\ldots,n\}$

فإن $$A^n=R^n=R\times R\times\ldots\times R$$
$$=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n):a_i\in R\;\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}\}$$

٣ـ٣ العلاقات الثنائية : Binary Relations

تعريف ٣ـ٣ـ١:

يقال إن R علاقة من المجموعة غير الخالية A إلى المجموعة غير الخالية B إذا كانت $R \subseteq A \times B$ ، ويقال إن $(a,b) \in R$ أو aRb إذا ارتبط العنصر a بالعنصر b وفقاً للعلاقة R كما يقال إن $(a,b) \notin R$ أو $a \not R b$ إذ لم يرتبط العنصر a بالعنصر b وفقا للعلاقة R،وكانسحاب طبيعي لمفهوم الرتبة على العلاقة ،فإن رتبة العلاقة المنتهية هي عدد الأزواج المرتبة التي تكون تلك العلاقة.

مثال ٣ـ٣ـ١ :

بفرض أن $A = \{a,b,c\}$ ، $B = \{x,y\}$ ،فإن كلا من R_1 ، R_2 ، R_3 علاقة من A إلى B حيث :

$$R_1 = \{(a,b)\},$$
$$R_2 = \{(b,x),(c,y)\},$$
$$R_3 = A \times B .$$

يمكن وصف العلاقة R من المجموعة A إلى المجموعة B سهمياً على أنها أسهم تخرج من بعض عناصر A إلى بعض عناصر B .

تعريف ٣ـ٣ـ٢ :

بفرض أن R علاقة من A إلى B ،فإن مجال أو نطاق (Domain) العلاقة R والذي يرمز له بالرمز $Dom(R)$ يعرف كما يلي :

$$Dom(R) = \{a \in A : \exists\, b \in B, aRb\}$$

ويعرف مدى $R\,(Range)$ كما يلي:

$$Range(R) = \{b \in B : \exists\, a \in A, aRb\}$$

أي أن

$$Dom(R) \subseteq A\ ,\ Range(R) \subseteq B$$

إذا كانت $A = B$ فنقول إن R علاقة على A .

ملحوظة:

يمكن لعلاقة أن تحتوى على زوج مرتب واحد ويمكن لعلاقة أخـرى أن تساوى $A \times B$ وكلاهما علاقة. إن هذا المفهوم العام للعلاقة يجعلها بعيدة عن أهدافنا، لذلك سنتعرض بالدرايبة لنوعية من العلاقات تعرف بعلاقة التكافؤ.

تعريف ٣ـ٣ـ٣ :

إذا كانت R علاقة على المجموعة غير الخالية A ، فإنه يقـال إن R علاقة :

(أ) عاكسة (reflexive) إذا تحقق الشرط الآتي : $\forall a \in A \Rightarrow aRa$

(ب) متناظرة أو متماثلة (symmetric) إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\text{if } (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

(جـ) متعدية أو ناقلة (transitive) إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\text{if } (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

(د) تكافؤ (equivalence Relation) على A إذا كانت عاكسة ومتماثلـة وناقلة.

مثال ٢ـ٣ـ٢:

إذا كانت $A = \{a,b,c\}$. ادرس العلاقات الآتية على A (أي بين مـا إذا كانت علاقة تكافؤ من عدمه مع شرح ذلك).

$$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$$

$R_2 = \{(a,a)\}$.
$R_3 = \{(a,b)\}$.

البرهان :

أولا : العلاقة R_1 :

ـ عاكسة؛ لأن كل عنصر مرتبط مع نفسه.

ـ متناظرة؛ لأن عدم التناظر، يتطلب احتواء R على الزوج (a,b) مثلا في الوقت الذي لايحتوى فيه على الزوج (b,a) وهذا لم يحدث.

ـ ناقلة ،لأن العلاقة غير الناقلة تحتوى على $(a,b),(b,a)$ مثلا ولا تحتوى على (a,c) وهذا لم يحدث، أي ناقلة لعدم وجود ما ينفي ذلك. مما سبق يتضح أن R_1 علاقة تكافؤ وهي أصغر علاقة تكافؤ يمكن تعريفها على A ،وعدد عناصرها يساوى عدد عناصر A . أي إذا كانت R علاقة تكافؤ أخرى على A فإن $R_1 \subseteq R$.

ثانيا: العلاقة R_2 :

ـ غير عاكسة ؛ حيث يوجد عنصر لم يرتبط مع نفسه وعلى سبيل المثال:

$b \in A, (b,b) \notin R$

ـ متناظرة، لعدم حدوث عكس ذلك.

- متعدية، لعدم حدوث عكس ذلك. وعلى هذا يتضح أن R_2 غير عاكسة ومتناظرة ومتعدية ، أي ليست علاقة تكافؤ كما تحتوى على أقل عدد من الأزواج المرتبة التي تحقق التناظر والتعدي ولا تحقق الانعكاس، أي أن أي علاقة أخرى تحقق الخواص السابقة نفسها فإنها ستحتوي على عدد من العناصر أكبر من أو يساوي عدد عناصر R_2 ،وعلى هذا فإن R_2 هي العلاقة

التي تحقق الخواص السابقة بأقل رتبة .

ثالثاً : العلاقة R_3 :

ــ غير عاكسة لأن $(a,a) \notin R_3$

ــ غير متناظرة لأن $(a,b) \in R_3$ ، $(b,a) \notin R_3$.

ــ العلاقة R_3 متعدية. مما سبق يتضح أن R_3 ليست علاقة تكافؤ بل هي غير عاكسة وغير متناظرة وفقط متعدية ، وتحتوى على أصغر عدد من الأزواج المرتبة ،أي أنها العلاقة غير عاكسة وغير متناظرة ومتعدية وبأقل رتبة.

مثال ٣ـ٣ـ٣:

إذا كانت $A = \{a,b,c,d\}$ ، عرف علاقة تكافؤ R على A بأقل رتبة، على أن تحتوى على الزوجين المرتبين $(a,b),(a,d)$ ضمن عناصرها.

الحل:

-حتى تكون R عاكسة فلابد من احتوائها على الأزواج المرتبة الآتية:

$$(a,a),(b,b),(c,c),(d,d).$$

ــ حتى تكون R متناظرة فلابد من احتواها على الزوجين المرتبين الآتيين :

$$(b,a),(d,a)$$

ــ حتى تكون R متعدية يجب أن تحتوى على (d,b) ، (b,d) ، وبعد الأطمئنان على تحقق خاصية التناظر نجد أن R ستكون كما يلي:

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,d),(b,a),$$
$$(d,a),(b,d),(d,b)\}$$

تعريف:٣ــ٣ــ٤:

إذا كانت R علاقة متناظرة ومتعدية على A وأن

$$\forall a,b \in A, a \neq b \Rightarrow (a,b) \in R$$

فإن R علاقة تكافؤ، أي عاكسة وذلك لأن ،

$$\forall a,b \in A, (a,b), (b,a) \in R$$

ولكن R متعدية ،

$$\therefore \ (a,a) \in R, (b,b) \in R \ \forall a,b \in A$$

$\therefore$ R عاكسة وبالتالي هي علاقة تكافؤ .

مثال ٣ــ٣ــ٤ :

نفرض أن A هي مجموعة كل المستقيمات في المســـتوى، وأن R_1 ، R_2 علاقتان على A معرفتان كما يلي:

$$R_1 = \{(a,b): a,b \in A, \ a // b\}$$
$$R_2 = \{(a,b): a,b \in A, a \perp b\}$$

ادرس العلاقتين R_1 ، R_2 .

الحل :

ـــ R_1 عاكسة على اعتبار أن أيّ مستقيم موازٍ لنفسه.

ـــ R_1 متناظرة، لأن عملية التوازي إبدالية.

ـــ R_1 متعدية حيث إن عملية التوازي متعدية.

$\therefore$ R_1 علاقة تكافؤ.

ـــ R_2 ليست عاكسة، لأن المستقيم لا يمكن أن يكون عمودياً على نفسه .

ـــ R_2 متناظرة، لأن عملية التعامد إبدالية.

- R_2 غير متعدية حيث $\text{if } a \perp b, b \perp c \Rightarrow a // c$.

(i) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$.

(ii) $(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$.

(iii) $A\times(B \Delta C)=(A\times B)\Delta (A\times C)$:

(iv) $(B \Delta C)\times A=(B\times A) \Delta (C\times A)$.

(٣) إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ ، وكانت $B=\{-2,0,2,5\}$ ،

(أ) أوجد العلاقة R_1 من A إلى B حيث

$$(a,b)\in R_1 \Leftrightarrow a<b$$

(ب) أوجد العلاقة R_2 من A إلى B حيث

$$(a,b)\in R_2 \Leftrightarrow a>b$$

(٤) نفرض أن R علاقة على N معرفة كما يلي:

$$R=\{(x,y):x,y\in N, x+2y=12\}$$

(أ) اكتب عناصر R . (ب) أوجد نطاق ومدى R.

(٥) بفرض أن R علاقة على $N\times N$ معرفة كما يلي :

$$(a,b)\,R\,(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ.

(٦) بفرض أن R علاقة على Z معرفة كما يلي:

$$R=\{(x,y), x,y\in Z, x+y=\text{ عدد فردى }\}$$

ادرس العلاقة R.

(٧) ادرس العلاقة R على Z في كل حالة مما يأتي :

(i) $(a,b)\in R \Leftrightarrow a<b$.

(ii) $(a,b)\in R \Leftrightarrow a-b$ is even .

(iii) $(a,b)\in R \Leftrightarrow ab\geq 0$

الرواسم
Mappings

٤ــ١ الرواسم Mappings

تعد الرواسم (التطبيقات) من المفـــاهيم الرياضيـــة ذات الأهميـــة في الاستخدامات المتعددة في فروع الرياضيات وبعض الفروع العلمية الأخـــرى، والراسم ما هو إلا علاقة ثنائية تربط مجموعتين تحت شروط معينة.

تعريف ٤ــ١ــ١:

بفرض أن A ، B مجموعتان غير خاليتين، الراسم (التطبيـــق) مـــن المجموعة A إلى المجموعة B هو علاقة تربط كل عنصر من عناصر A بعنصر وحيد من عناصر B، ويرمز للراســـم بـــالرمز f، g، h، .... وإذا كـــان f راســـم من المجموعة A إلى المجموعة B فإننا نكـــب $f: A \to B$ ، وإذا كان $(a,b) \in f$ فإننا نقول إن b صورة (image) العنصر a بواســـطة الراسم f وتكتب $f(a)=b$.

تعريف ٤ــ١ــ٢ :

إذا كان $f: A \to B$ راسماً ، فإن:

(أ) المجموعة A تسمى نطاق أو مجال (Domain) الراسم f.

(ب) المجموعة B تسمى النطاق المصاحب أو المجـــال المقـــابل (Codomain) للراسم f.

(جـ) المجموعة $f(A)=\{b\in B: \exists a\in A, f(a)=b\}$ تسمى مدى (Range) الراسم f .

مثال ٤ـ١ـ١ :

إذا كانت $A=\{a,b,c,d\}$ ، وكانت $B=\{1,2,3,4\}$ ، فأي من العلاقات الآتية تعد راسماً من A إلى B ؟

$$R_1=\{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)\}.$$
$$R_2=\{(a,1),(a,2),(a,3)\}.$$
$$R_3=A\times B.$$
$$R_4=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}.$$

وعندما تكون العلاقة راسماً أوجد المجال والمجال المقابل والمدى.

الحل :

أولاً: R_1 راسم من A إلى B ، حيث إن كل عنصر من A ارتبط مع عنصر وحيد من B مع الملاحظة أنه لا مانع من ارتباط أكثر من عنصر من عناصر A بالعنصر نفسه من B ، لذلك سوف نرمز للعلاقة R_1 بالرمز $f:A\to B$، المجال $=A$ ، المجال المقابل $=B$، المدى $=\{1\}$.

ثانياً : R_2 ليست راسماً لسببين هما :

(١) العنصر a من المجموعة A ارتبط مع أكثر من عنصر من عناصر B .

(٢) يوجد عنصر في A مثل b أو d لم يرتبط مع أي عنصر من عناصر B .

ثالثاً : $R_3 = A \times B$ لا يعد راسماً، حيث إن أي عنصر من عناصرالمجموعة A مرتبط مع كل عنصر من عناصر المجموعة B ،أي بأكثر من عنصر .

رابعاً : R_4 تعد راسماً من المجموعة A إلى المجموعة B، وبذلك يكون المجال $= A$، المجال المقابل $= B$، المدى $= B$

ملحوظة :

مدى أي راسم هو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

مثال ٤ـ١ـ٢ :

إذا كان $f: R \to \{-1,1\}$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \text{ عددا نسبيا} \\ -1 & \text{إذا كانت } x \text{ عددا غير نسبي} \end{cases}$$

فإن f راسم من R إلى $\{-1,1\}$

تعريف ٤ـ١ـ٣ :

إذا كان $f: A \to B$ ، $g: X \to Y$ راسمين، يقال إن الراسمين f ، g متساويان إذا تحققت الشروط التالية :

(أ) مجال f = مجال g ، أي أن $A = X$.

(ب) المجال المقابل للراسم f = المجال المقابل للراسم g.

(جـ) صيغة f هي نفسها صيغة g، أي أن

$$f(a) = g(a)\ \forall a \in A = X$$

واضح أن الراسم لا يساوى إلا نفسه وبنفس المجال والمجال المقابل .

مثال ٤ـ١ـ٣ :

بفرض أن $f:Z \to Z$ ، $g:Z \to N_0$ ،حيث

$$f(a)=a^2,\ \forall a \in Z \qquad ; \qquad g(a)=a^2,\ \forall a \in Z$$

واضح أن f ، g لهما المجال نفسه و الصيغة نفسها لكـــن المجـــالين المقـــابلين مختلفان ، لذلك من الخطأ القول إن f ، g متساويان.

٤ ــ ٢ أنواع الرواسم Types of Mappings

تعريف ٤ــ٢ــ١:

إذا كان $f:A \to B$ راسما فإنه يقال إن :

(أ) f راسم أحادي (متباين) (injective or one to one 1-1)، إذا تحقق الشرط الآتي :

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أو بطريقه مكافئة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(ب) f راسم فوقي (غـــامر أو شامل) (surjective or onto) ، إذا كان $f(A)=B$ ، أي المدى = المجال المقابل، أي أن

$$\forall y \in B \exists x \in A: f(x)=y$$

(جـــ) f تناظر أحادي (تقابل) (1-1 correspondence or bijective)،إذا كان أحاديا وفوقياً.

مثال ٤ـ٢ـ١:

ادرس الراسم $f:Z \to Z$ ، المعرف كما يلي:

$$f(x) = -x \ , \ \forall \, x \in Z$$

(أي بين ما إذا كان f أحادياً من عدمه وفوقياً من عدمه) .

الحل :

$$\text{Let } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f أحادي.

$$\forall \, y \in Z \, \exists -y \in Z : f(-y) = -(-y) = y$$

$\therefore$ f فوقي، وعلى ذلك فإن f تناظر أحادي.

مثال ٤ـ٢ـ٢ :

ادرس الراسم $f : N \to Z$ المعرف كما يلي:

$$f(x) = -x \ , \ \forall \, x \in N$$

الحل :

الراسم f لا يساوى الراسم المعرف في المثال ٤ـ٢ـ١، رغم تطابق الصيغتين وتساوى المجالين المقابلين؛ وذلك للاختلاف في المجال، وسوف يترتب على ذلك أن f في هذا المثال أحادي، لكنه ليس فوقيا ؛حيث $4 \in Z$ ولكن $-4 \notin N$ أي أن العنصر 4 لا يمثل صورة لأي عنصر من N. وعلى ذلك فإن f ليس تناظرا أحاديا.

مثال ٤ـ٢ـ٣ :

ادرس الراسم $f : Z \to Z$ المعرف كما يلي :

$$f(x) = 3x, \quad \forall x \in Z$$

الحل :

$$\text{Let } f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

$\therefore$ f أحادي.ولكن f ليس فوقيا، لأن أي عنصر x في المجال المقابل كي يكون صورة فلا بد من وجود العنصر $\frac{x}{3}$ في المجال، والأخير قد لا يوجد فعلى سبيل المثال العنصر 5 في المجال المقابل لا يمثل صورة لأي عنصر من عناصر المجال لأن المجال Z لا يحتوي على العدد $\frac{5}{3}$.

$\therefore$ f ليس تناظراً أحادياً.

مثال ٤-٢-٤ :

ادرس الراسم $f:Z\to Z$ المعرف كما يلي :

$$f(x)=x^2\ ,\ \forall x\in Z$$

الحل :

$$\text{Let } f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=\pm x_2$$

أي ليس بالضرورة أن يكون $x_1=x_2$ ، وعلى سبيل المثال $f(-2)=f(2)=4$ مع أن $-2\neq 2$. وعلى ذلك f ليس أحادياً،كما أن f ليس فوقيا، لأن الأعداد السالبة في المجال المقابل ليست صورا لأي عنصر من عناصر المجال.

$\therefore$ الراسم f ليس تناظراً أحادياً.

مثال ٤ـ٢ـ٥ :

ادرس الراسم $f:Z \to Z$ المعرف كما يلي :

$$f(x)=x^3 , \ \forall x \in Z$$

الحل :

$$\text{Let } f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore$ f أحادي.

الراسم f ليس فوقياً، حيث توجد أعداد في المجال المقابل جذرها الثالث ليس عدداً صحيحاً، مثلاً العدد 5 لا يمثل صورة لأي عدد في Z لأن $\sqrt[3]{5} \notin Z$.

$\therefore$ f ليس تناظرا أحادياً.

تعريف ٤ـ٢ـ٢ :

١) إذا كان $f:A \to A$ راسما بحيث $f(x)=x , \forall x \in A$ فإن f يسمى راسم تطابق (identity map) ويرمز له بالرمز I_A وأحياناً I إن لم يحدث اختلاط في الأمر. وإذا كانت $B \subseteq A$ فإن $i:B \to A$ المعرف كما يلي :

$$i(x)=I(x) , \forall x \in B$$

يسمى راسم احتواء (inclusion map) ويرمز له بالرمز I_B.

ب) وإذا كان $f:A \to B$ راسماً معرفا كما يلي :

$$f(x) = y_0 \ , \ \forall x \in A$$

فإنه يقال عن f إنه راسم ثابت (constant map)

(جـ) إذا كـان $f: A \to B$ راسمـا وكـان $A_1 \subseteq A$ فـإن الراسـم

$f / A_1 : A_1 \to B$، والمعرف كما يلي :

$$(f / A_1)(x) = f(a) \;,\; \forall a \in A_1$$

يسمى تقييد (restriction) الراسم f على A_1 .

ملحوظة:

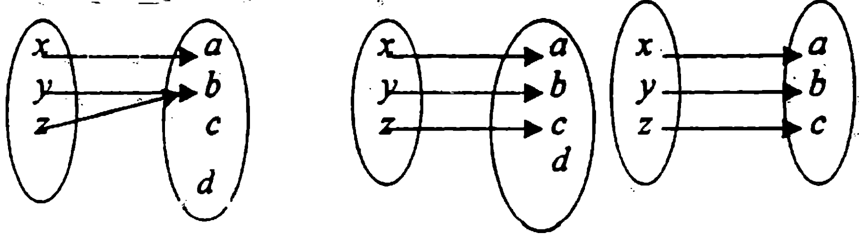
إذا كان $f: A \to B$ راسماً فإن $f^{-1}: B \to A$ ليس بالضرورة راسماً لكنه علاقة من B إلى A وقد يكون راسماً ولكن تحت شروط معينة تتضح من المثال الآتي:

مثال ٤ـ٢ـ٦ :

نفرض أن $A = \{x, y, z\}$ ، $B_1 = \{a, b, c, d\}$ ، $B_2 = \{a, b, c\}$

،نعرف الراسمين f_1 ، f_2 من A إلى B_1 والراسم f_3 من A إلى B_2 كما هو مبين بالمخططات السهمية التالية:

$f_1 : A \longrightarrow B_1$ $f_2 : A \longrightarrow B_1$ $f_3 \; A \longrightarrow B_2$



نلحظ أن $f_1^{-1} : B_1 \to A$ علاقة لكنها ليست راسما لسببين هما :

الأول: ارتباط العنصر b بعنصرين من A هما y ، z، وهذا يتعارض مع تعريف الراسم.

الثاني : أنه يوجد عنصر في B_1 مثل العنصر c لم يرتبط مع أي عنصر من عناصر A .

السبب الأول نتيجة مباشرة لكون أن الراسم f_1 ليس أحادياً حيث إن $f_1(y)=f_1(z)=b$ ، $y \neq z$, والسبب الثاني نتيجة مباشرة لكون أن f_1 ليس فوقيا ، حيث يوجد عنصر في المجال المقابل لا يمثل صورة لأي عنصر من المجال مثل العنصر c .كما أن $f_2^{-1}: B_1 \to A$ ليس راسماً ، حيث يوجد العنصر d في المجال لم يرتبط مع أي عنصر من عناضر المجال المقابل وهذه نتيجة مباشرة لكون f_2 ليس فوقياً.وأخيراً فإن $f_3^{-1}: B_2 \to A$ راسم ، وهذه نتيجة مباشرة لكون أن f_3 تناظر أحادي .

نظريه ٤ــ٢ــ١ :

إذا كان $f: A \to B$ تناظراً أحادياً فإن المعكوس f^{-1} راسم وتناظر أحادي أيضاً وأن $f^{-1} \circ f = I_A$ ، $f \circ f^{-1} = I_B$

البرهان :

لما كان f تناظراً أحادياً فإن كل عنصر من عناصر B هو صورة لعنصر وحيد من A ، وهذا يترتب عليه أن تكون الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B هي عنصر وحيد في A ، أي أن لكل $b \in B$ يوجد نصر وحيد $a \in A$ بحيث يكون $f^{-1}(b)=a$ ، إذن f^{-1} أحادي .وطالما f أحادي، $f(A)=B$ فأن $f^{-1}(B)=A$ إذن f^{-1} فوقي.

$\therefore f^{-1}$ تناظر أحادي.

أيضا

$$\forall a \in A, b \in B, f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

$$\therefore\ \forall a \in A \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$$

$$= f^{-1}(b) = a = I_A(a)$$

$$\therefore\ f^{-1} \circ f = I_A$$

وكذلك

$$\forall b \in B, (f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b = I_B(b)$$

$$\therefore\ f \circ f^{-1} = I_B$$

نظرية ٤ـ٢ـ٢ :

إذا كان $f : A \to B$ راسماً وكانت A_1 و A_2 مجموعتين جزئيتين من A ، وأن B_1 ، B_2 مجموعتان جزئيتان من B ، فإن

(i) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$,

(ii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(iii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,
$f(A_1 - A_2) \supseteq f(A_1) - f(A_2)$,

(iv) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$,

(v) $f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$,

(vi) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(vii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(viii) $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$.

البرهان :

(i) Let $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1 : f(x) = y$

ولكن $A_1 \subseteq A_2$

$$\therefore\ x \in A_2 \Rightarrow f(x) = y \in f(A_2)$$

$$\therefore\ f(A_1) \subseteq f(A_2)$$

(ii) Let $y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y$

if $x \in A_1 \Rightarrow f(x) = y \in f(A_1) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$

if $x \in A_2 \Rightarrow f(x) = y \in f(A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$

$\therefore\ f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ (1)

Let $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

if $y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x \in A_1 : f(x) = y \in f(A_1 \cup A_2)$

if $y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x \in A_2 : f(x) = y \in f(A_1 \cup A_2)$

$\therefore\ f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$ (2)

من (1) ,(2) يتضح أن :

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$$

(iii) Let $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y$

$\because\ x \in A_1, x \in A_2 \Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2)$

$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$$\therefore\ f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات الجزء الثاني من هذه الفقرة ، كما يلي:

If $y \in f(A_2) - f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2) \wedge y \notin f(A_1)$

$\Rightarrow\ \exists\ x \in A_2\ ,\ x \notin A_1\ ,\ f(x) = y$

$\Rightarrow x \in A_2 - A_1 \Rightarrow f(x) = y \in f(A_2 - A_1)$

$$\therefore\ f(\mathrm{A}_2) - f(A_1) \subseteq f(A_2 - A_1)$$

(iv) Let $y \in f(f^{-1}(B_1)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B_1) : f(x) = y$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f\, f^{-1}(y) = y \in B_1$

$$\therefore\ f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$$

(v) Let $x\in A_1 \Rightarrow \exists y\in f(A_1):f(x)=y\Rightarrow$

$$x=f^{-1}(y)\in f^{-1}(f(A_1))$$

$$\therefore\ A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1)).$$

(vi) Let $x\in f^{-1}(B_1\cap B_2)\Rightarrow\exists y\in B_1\cap B_2: f(x)=y\in B_1\cap B_2$

$$\Rightarrow f(x)=y\in B_1,\ f(x)=y\in B_2$$

$$\therefore\ x\in f^{-1}(B_1)\wedge x\in f^{-1}(B_2)\Rightarrow x\in f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$$

$$\therefore\ f^{-1}(B_1\cap B_2)\subseteq f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2) \qquad (1)$$

ومن السهل وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن :

$$f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)\subseteq f^{-1}(B_1\cap B_2) \qquad (2)$$

من (1) , (2) نحصل على الآتي :

$$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$$

(vii) Let $x\in f^{-1}(B_1\cup B_2)\Rightarrow\exists\ y\in B_1\cup B_2:f(x)=y\Rightarrow$

$$y\in B_1\vee y\in B_2\Rightarrow x\in f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(B_1)\vee x\in f^{-1}(y)$$

$$\subseteq f^{-1}(B_2)\Rightarrow x\in f^{-1}(y)\subseteq f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$$

$$\therefore\ f^{-1}(B_1\cup B_2)\subseteq f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2) \qquad (1)$$

بسهولة يمكن إثبات أن :

$$f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)\subseteq f^{-1}(B_1\cap B_2) \qquad (2)$$

من (1) , (2) نحصل على :

$$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$$

(viii) Let $x\in f^{-1}(B_1^c)\Rightarrow\exists y\in B_1^c:f(x)=y$

$$\Rightarrow y\notin B_1\Rightarrow f(x)\notin B_1\Rightarrow x\notin f^{-1}(B_1)\Rightarrow x\in(f^{-1}(B_1))^c$$

$$\therefore\ f^{-1}(B_1^c)\subseteq(f^{-1}(B_1))^c \qquad (1)$$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن :

(2) $(f^{-1}(B_1))^c \subseteq f^{-1}(B_1^c)$

من (1) , (2) نحصل على $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$

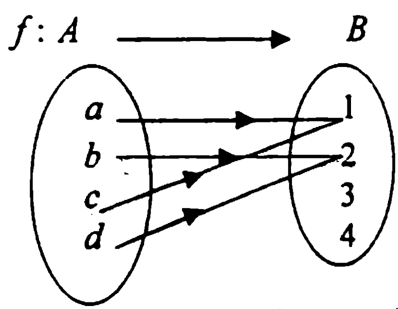
ملحوظة :

العلاقات (iii), (iv), (v) في النظرية السابقة في حاجة إلى أمثلة تـــبرر عدم التساوي، لذلك نقدم المثالين الآتيين على اعتبار أن

$$B = \{1; 2, 3, 4\} ، A = \{a, b, c, d\}$$

مثال ٤ـ٢ـ٧ :

نفرض أن $f : A \to B$ راسم معرف بالمخطط السهمي التالي:



وبفرض أن $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{c, d\}$

(1) $\therefore\ A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \phi$

لكن $f(A_1) = \{1, 2\}$, $f(A_2) = \{1, 2\}$

(2) $\therefore\ f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 2\}$

من (1) , (2) نحصل على $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subseteq f(A_1 \cap A_2)$

أيضاً

(1) $A_1 - A_2 = \{a, b\} \Rightarrow f(A_1 - A_2) = \{1, 2\}$

ولكن

$f(A_1) - f(A_2) = \{1,2\} - \{1,2\} = \phi$ (2)

من (1) ,(2) نحصل على أن $f(A_1 - A_2) \not\subseteq f(A_1) - f(A_2)$

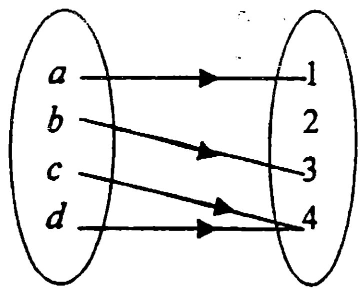
ملحوظة:

واضح أن عدم التساوي نتيجة مباشرة لكون f ليس أحادياً.

مثال ٤ـ٢ـ٨ :

بفرض أن $f : A \to B$ راسم معرف بالمخطط السهمي الآتي :

$f : A \longrightarrow B$



و أن $B_1 = \{1,2\}$

$\therefore\ f^{-1}(B_1) = \{a\}$

$\therefore\ f(f^{-1}(B_1)) = \{1\} \subseteq \{1,2\} = B_1$

واضح أن عدم التساوي سببه أن f ليس فوقياً .

وبفرض أن $A_1 = \{b,c\}$

$\therefore\ f(A_1) = \{3,4\}, f^{-1}(f(A_1)) = \{b,c,d\} \supseteq \{b,c\} = A_1$

$\therefore\ A_1 \subseteq f^{-1} f(A_1)$

لاحظ أن عدم التساوي سبب مباشر لكون f ليس أحادياً .

مثال ٤ـ٢ـ٩ :

إذا كان $f : R \to R$ راسماً معرفاً كما يلي :

$$f(x)=3x+6 \ , \quad \forall x \in R$$

ادرس الراسم f (أي بين ما إذا كان تناظراً أحادياً من عدمه، وفي حالة ما إذا كان تناظراً أحادياً أوجد صيغة لمعكوس الراسم) .

الحل:

$$\text{Let } f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 3x_1+6 = 3x_2+6 \Rightarrow x_1=x_2$$

$\therefore$ f أحادي .

$$f(x)=y=3x+6 \Rightarrow x=\frac{y-6}{3}$$

$$\therefore \ x=f^{-1}(y)=\frac{y-6}{3}$$

وحيث إن المقدار $\frac{y-6}{3}$ دائما عدد حقيقي أي أن

$$\frac{y-6}{3} \in R \quad , \ \forall \ y \in R$$

$\therefore$ f فوقي .

على ذلك فإن f تناظر أحادي ومعكوسة f^{-1} راسم معرف كما يلي :

$$f^{-1}:R \to R : f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3} \ , \ \forall \ x \in R$$

مثال ٤ـ٢ـ١٠ :

إذا كان كل من $f:R \to R$, $g:R \to R$ راسماً ،حيث

$$f(x)=2x, \ \forall \ x \in R$$

$$g(x)=x^2+5 \quad , \forall\ x \in R$$

أوجد صيغة للتحصيل $f \circ g$, $g \circ f$ ثم بين أن عملية تحصيل الرواسم غـــير ابدالية .

الحل :

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=4x^2+5$$
$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+5)=2x^2+10$$

واضح أن عملية تحصيل الرواسم ليست ابدالية ، فمثلا بفرض أن $x=5$

$$\therefore\ (g \circ f)(5)=4x(25)+5=105,$$
$$(f \circ g)(5)=2x(25)+10=6$$
$$\therefore\ (g \circ f)(5) \neq (f \circ g)(5)$$

نظرية ٤ــ٢ــ٣ :

إذا كان كل من $f: A \to B$ ، $g: B \to C$ تناظراً أحادياً .

اثبت أن :

(أ) الراسم المحصل $(g \circ f)$ أيضاً تناظراً أحادياً.

(ب) $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$.

البرهان :

(أ) $g \circ f$ أحادي،لأن:

If $(g \circ f)(x_1)=(g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$

$$\therefore\ g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

ولكن g أحادي

$$\therefore\ f(x_1)=f(x_2)$$

ولكن f أحادي، وعليه فإن $x_1=x_2$.

$\therefore$ $(g \circ f)$ أحادي .

أيضاً $(g \circ f)$ فوقي، حيث لكل عنصر $c \in C$ يوجد عنصر $b \in B$ بحيث $g(b)=c$ ،وذلك لأن g فوقي، كما يترتب على ذلك وجود $a \in A$ بحيث $f(a)=b$ لأن f فوقي، وعلى ذلك فإن لكل $c \in C$ يوجد $a \in A$ بحيث

$$(g \circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$$

$\therefore$ $(g \circ f)$ فوقي.

$\therefore$ $g \circ f$ تناظر أحادي .

(ب) سوف نبرهن أن $f^{-1} \circ g^{-1}$ هو معكوس يميني للراسم المحصل $g \circ f$

أي أن $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})=I_C$

وأيضاً $f^{-1} \circ g^{-1}$ معكوس يساوى الراسم المحصل $g \circ f$. أي أن

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)=I_A$$

وذلك كما يلي: $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})=g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$

$$=g \circ I_B \circ g^{-1}$$

$$=g \circ g^{-1}=I_C$$

وأيضاً $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)=f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$

$$=f^{-1} \circ I_B \circ f=I_A$$

وعلى ذلك يكون الراسم المحصل $f^{-1} \circ g^{-1}$ معكوساً للراسم المحصل $(g \circ f)$ أي أن

$$(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$$

مثال ٤ـ٢ـ١٦ :

إذا كان $f: R\to R$ ، $g: R\to R$ راسمين معرفين كما يلي:

$$f(x)=3x+5\ ,\ \forall\ x\in R \quad , \quad g(x)=2x-7, \forall\ x\in R.$$

أثبت أن $(g\circ f)$ تناظر أحادي ،ومن ثم أوجد المعكوس بطريقتين مختلفتين .

الحل :

أولاً: من خلال حل المثال(٤-٢-٩) يمكن بسهولة إثبات أن:

(أ) الراسم $f: R\to R$ تناظر أحادي، ومعكوسه هو $f^{-1}: R\to R$ ، حيث

$$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3}, \forall x\in R.$$

(ب) الراسم $g: R\to R$ تناظر أحادى ومعكوسه هو $g^{-1}: R\to R$ ،حيث

$$g^{-1}(x)=\frac{x+7}{2}, \forall x\in R.$$

إذن $(g\circ f)$تناظر أحادي (بناء على نظرية(٤-٢-٣))، ومعكوسه هو $\rho=(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ ،حيث

$$\rho(x)=(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=f^{-1}(g^{-1}(x))=f^{-1}\left(\frac{x+7}{2}\right)=\frac{x-3}{6}$$

ثانيا: يمكن الحصول على المعكوس بطريقة أخرى وذلك كما يلي:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+5)=2(3x+5)-7=6x+3$$

وبالطريقة نفسها التي تمت فى مثال (٤-٢-٣) يمكن إثبات أن $(g\circ f)$ تناظر أحادي، وبالتالي معكوسه هو

$$\rho=(g\circ f)^{-1}=\frac{x-3}{6}$$

تمارين (٤)

(١) بين أياً من العلاقات الآتية تمثل راسما على مجموعة الأعداد الحقيقية R .

(i) $R_1=\{(x,y) : x+y^2=16\}$.

(ii) $R_2=\{(x,y) : x+y=0\}$.

(iii) $R_3=\{(x,y) : x^2+y^2=4 \ , \ y\geq 0\}$.

(iv) $R_4=\{(x,y) : 2x+y^3=8\}$.

(٢) إذا كان $f : X \to Y$ راسماً أحادياً ، أثبت أن

$$A=f^{-1}(f(A)) \quad , \quad A\subseteq X$$

(٣) إذا كان $f : X \to Y$ راسماً فوقياً. أثبت أن :

$$B=f(f^{-1}(B)) \ , B\subseteq Y$$

(٤) ادرس الراسم $f : R \to R$ المعرف كما يلي :

$$f(x)=3x+10 \quad , \ \forall \ x\in R$$

(٥) ادرس الراسم $f : X \to Y$ المعرف كما يلي :

$$f(x)=\frac{x-a}{x-b} \ , \ \forall \ x\in X$$

حيث $X=R-\{b\}$, $Y=R-\{1\}$

(٦) إذا كان $f : A \to B$ راسماً، وكانت R علاقة على A معرفة كما يلي :

$$x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad , \ x,y\in A$$

أثبت أن :

(أ) R علاقة تكافؤ على A .

(ب) $[x]=\{y\in A, y=f^{-1}(f(x))\}$