بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الرابع

الكمرات البسيطة (2)

SIMPLE BEAMS

إعداد

أ.د. مُحب محمد أنيس الشرباصي

أستاذ الهندسة الزراعية

ووكيل الكلية لشئون التعليم والطلاب

رابعاً : حالة حمل مثلث متماثل مقلوب:

Reversed symmetrical triangular load:

من الواضح أن كثافة الحمل عند أي قطاع فيم بين (A,C) وعلى بعد (x) متراً من نقطة (A) هي:

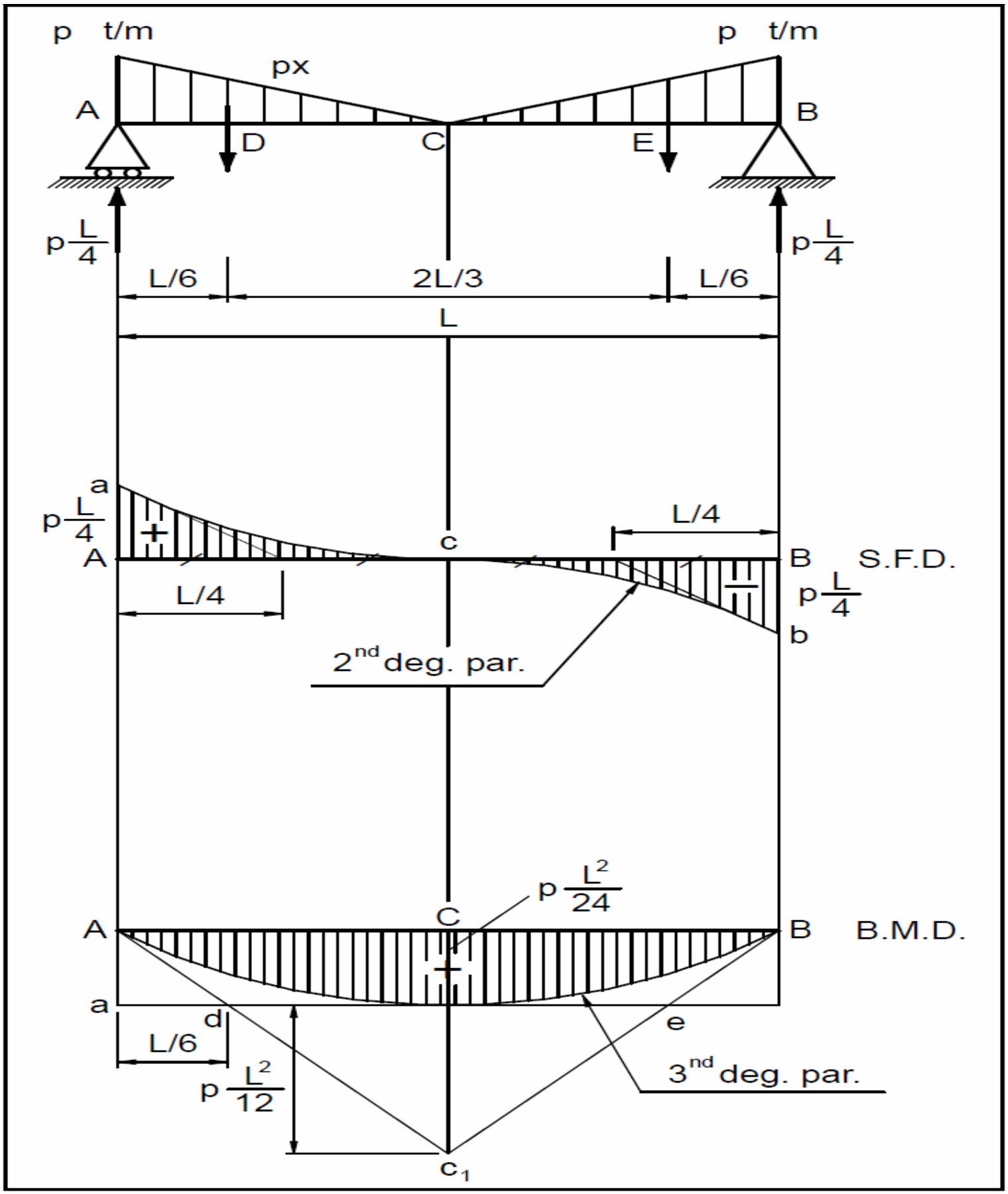
$$P_x = p\left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

وقيمة القص هي:

$$Q = p\left(\frac{L}{4} - x + \frac{x^2}{3L}\right)$$

وقيمة عزوم الانحناء هي:

$$M = p\left(\frac{Lx}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3L}\right)$$



(شكل–٢٩): حالة حمل مثلث متماثل مقلوب

بحد أقصى وهو:

$$M_{Max.} = \frac{pL^2}{24}$$

وذلك عند نقطة (C).

ويكون منحنى القص بين (a,c) قطاعاً من الدرجة الثانية ولكنه يختلف عن شكل القص في الحالة السابقة (وهو أيضاً قطاع من الدرجة الثانية) في أن المماس له الذي يوازي القاعدة هو المماس عند نقطة (C) حيث أن كثافة الحمل تساوي صفر وأن المماس الآخر عند نقطة (a) هو الذي يمر بمنتصف القاعدة (AC)، انظر شكل (29).

أما منحنى عزوم الانحناء فهو قطاع من الدرجة الثالثة ولكنه يختلف عن الحالة السابقة في أن المماس له عند نقطة (A) يمر بالثلث الخارجي للقاعدة (ac) بدلاً من الثلث الداخلي.

خامساً : حالة حمل متغير من الدرجة الأولى :

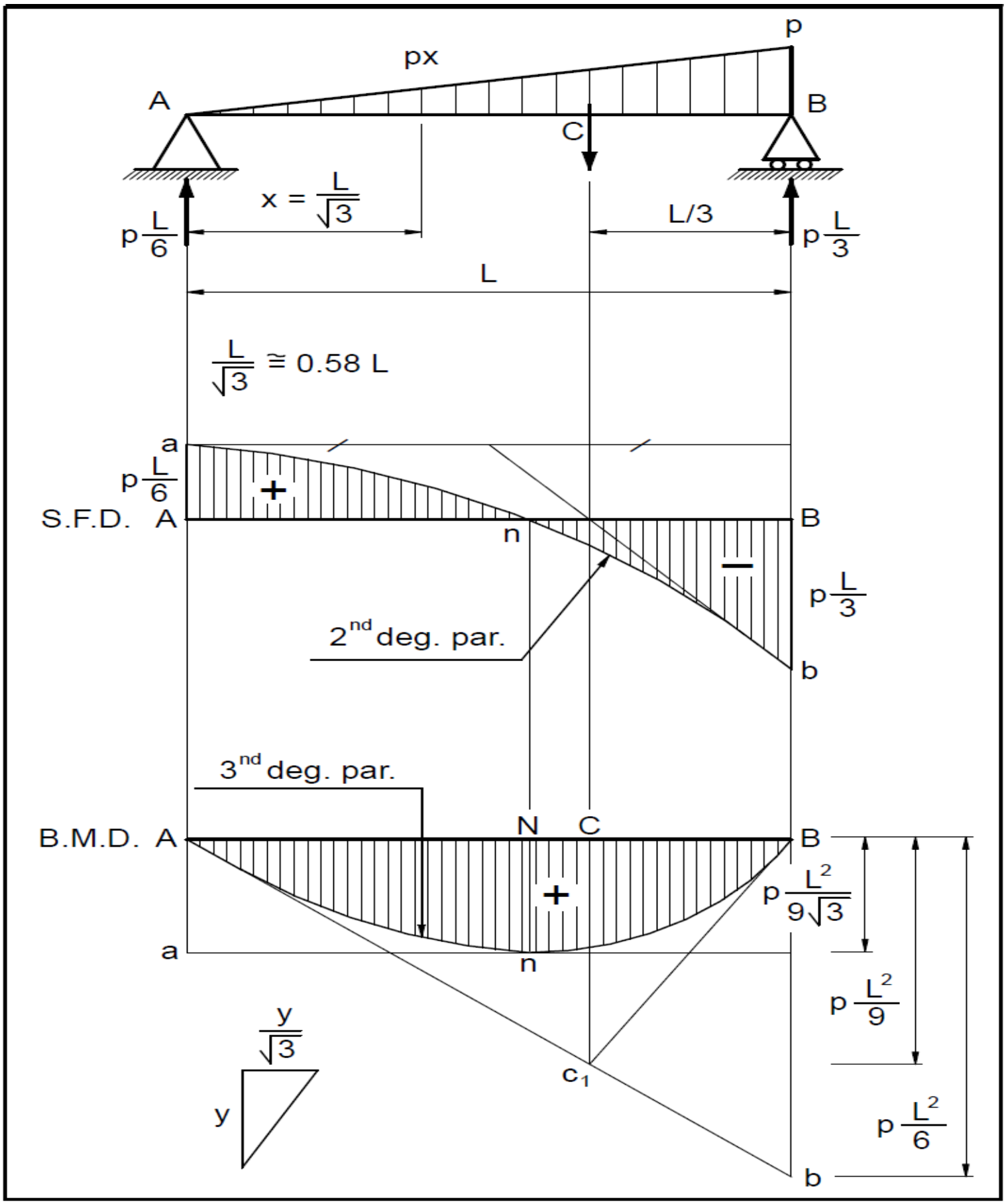
Linearly distributed load:

معادلة الحمل هنا تكون كالتالي:

$$P_x = p\left(\frac{x}{2}\right)$$

ومعادلة قوس القص هي:

$$Q = p\left(\frac{L}{6}\right) - p\left(\frac{x^2}{2L}\right)$$



(شكل–٣٠): حالة حمل متغير من الدرجة الأولى

ومنحنى القص في الشكل (27) منحنى من الدرجة الثانية وقيمة الإحداثيات فيه عند (A , B) تساوي عل التوالي (pL/6 , pL/3)، وهي تساوي قيم ردود الأفعال. والمماس للمنحنى عند نقطة (b) يمر بمنتصف القاعدة بوصفه منحنى من الدرجة الثانية. ومن المفيد أن نحدد وضع النقطة (a) على الخط (AB) حيث يكون القص صفراً، ويتضح من معادلة القص أن بعد النقطة (n) عن نقطة (A) هو:

$$A_n = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0.58L$$

ومعادلة عزوم الانحناء هي:

$$M = p\left(\frac{Lx}{6}\right) - p\left(\frac{x^3}{6L}\right)$$

أما شكل عزوم الانحناء فيكون منحنى من الدرجة الثالثة ولكنه غير متماثل، ويكون المماسان له عند النقطتين (A , B) بحيث يكون التقاطع كالتالي:

$$Bb = pL^2/6$$
$$Aa_1 = pL^2/3$$

ونقطة (a_1) غير ظاهرة في الرسم.

ويتقاطع هذان المماسان عند نقطة (c_1) بحيث يكون:

$$Cc_1 = pL^2/9$$

ومن المعلوم أن أكبر قيمة لعزوم الانحناء تحدث عند القطاع (N) حيث يكون القص منعدماً ويمكن تحديد قيمة هذا العزم بتعويض $\left(x = L/\sqrt{3}\right)$ في معادلة العزوم كالتالي:

$$M_{Max.} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.pL^2 = \frac{pL^2}{15.6}$$

كما يمكن حساب هذه القيمة من مساحة شكل القص على يسار النقطة (N) كالتالي:

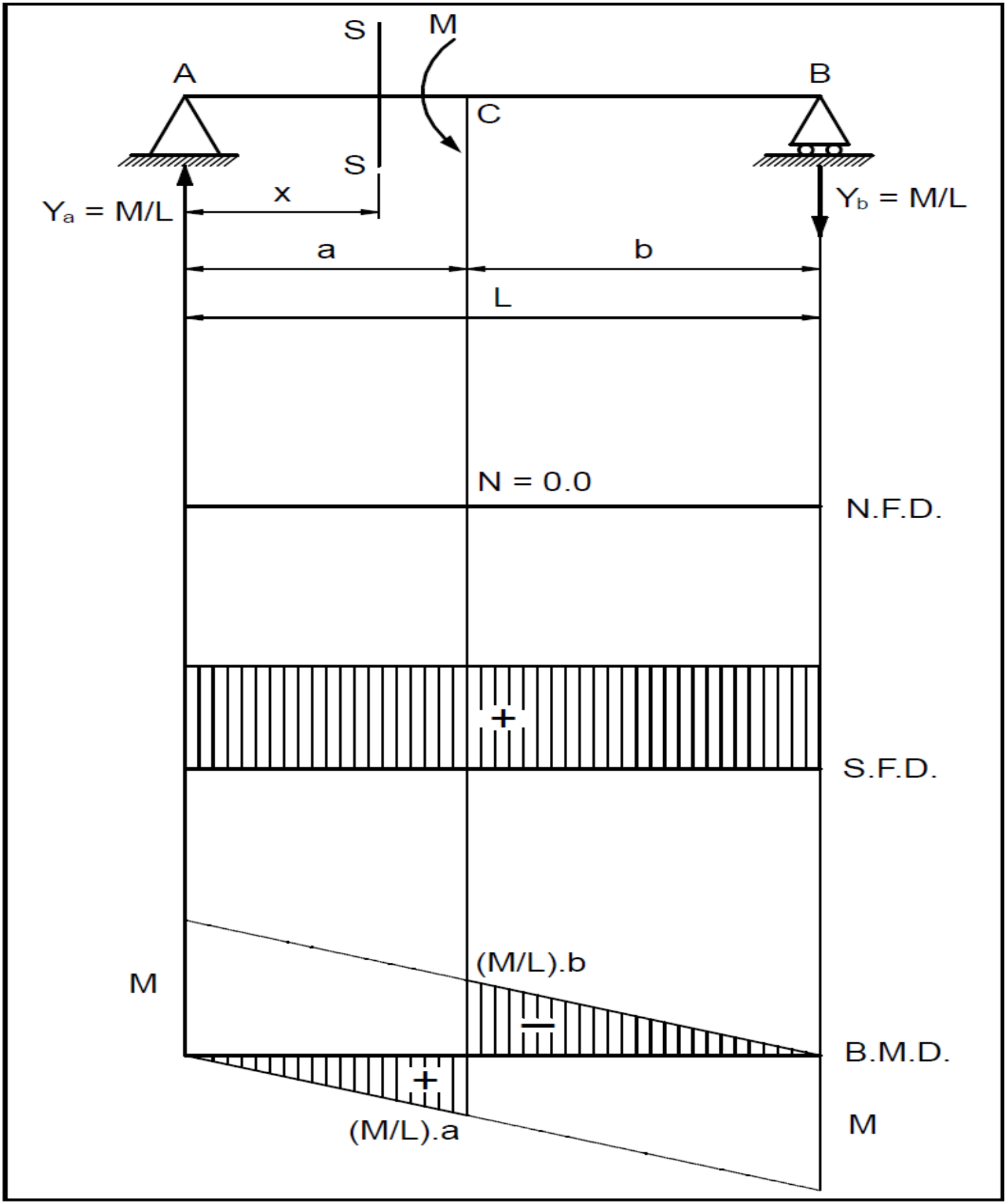
$$M_{Max.} = \frac{2}{3}.\frac{pL}{6}.\frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}pL^2$$

سادساً : حالة عزم مركز يؤثر على كمرة بسيطة :

Concentrated moment on a simple beam:

الشكل (31) يوضح كمرة بسيطة يؤثر عليها عزم مركز قيمته (M) عند نقطة (C)، والمطلوب رسم أشكال مؤثرات الإجهاد الداخلي؟

نلاحظ أن وجود العزم المركز (M) نتج عنه ردي فعل عند الركيزتين (A,B) متساويان في القيمة ومتضادان في الاتجاه وذلك حتى يتحقق شرط الاتزان الرأسي ($\Sigma Y=0.0$)، وقيمة كل منهما (M/L)، وتقسم الكمرة إلى جزأين الأول (AC) والثاني (CB) وذلك على النحو التالي:



(شكل–٣٢): حالة عزم مركز يؤثر على كمرة بسيطة

١- الجزء الأول (AC)، القطاع (S-S) على بعد (x) حيث $(a \geq x \geq 0.0)$

ونوجد مؤثرات الإجهاد الداخلي عند هذا القطاع على النحو التالي:

$$N_S = 0.0 \ , \ Q_S = M/L \quad , \ M_S = (M/L).x$$

نلاحظ في هذا الجزء أن القوى العمودية ثابتة وتساوي صفر, وقوى القص أيضاً ثابتة وتساوي (M/L)، وعزوم الانحناء عبارة عن دالة من الدرجة الأولى (خط مستقيم) ويتم رسمه على النحو التالي:

$$\text{For } x = 0.0 \quad , \quad M_A = 0.0$$
$$\text{For } x = a \quad , \quad M_C = (M/L).a$$

٢- الجزء الثاني (CB)، القطاع (S-S) على بعد (x) حيث $(L \geq x \geq a)$

ونوجد مؤثرات الإجهاد الداخلي عند هذا القطاع على النحو التالي:

$$N_S = 0.0 \ , \ Q_S = M/L \quad , \ M_S = (M/L).x - M$$

وبالنظر إلى العلاقات السابقة نجد أن قيم القوى العمودية وقوى القص لم يطرأ عليها أي تغيير، أما قيم عزوم الانحناء فهي أيضاً دالة من الدرجة الأولى ولكن بقيم مختلفة عن القيم السابقة ويتم رسم عزوم الانحناء لهذا الجزء كما يلي:

$$\text{For } x = a \quad , \quad M_C = (M/L).a - M = -M.(L-a)/L$$
$$= -(M/L).b$$
$$\text{For } x = L \quad , \quad M_B = (M/L).L - M = 0.0$$

وبمقارنة قيم العزوم عند نقطة (C) – مكان تأثير العزم المركز– نلاحظ أن الفرق بين عزمي الانحناء على يمين النقطة (C) مباشرة وعلى يسارها مباشرة يساوي قيمة العزم المركز (M)، أي أنه حدث تغير مفاجئ في قيمة عزم الانحناء عند مكان تأثير العزم المركز، انظر شكل (32).

من دراسة الحالات السابقة نستخلص الآتي:

- في حالة الأحمال المركزة تكون قيم القوى العمودية وقوى القص ثابتة بين كل حملين مركزين ويكون شكل القوى العمودية وقوى القص شكلاً مدرجاً ويحدث تغير مفاجئ في مكان تأثير الحمل المركز وهذا التغير يساوي قيمة الحمل المركز, بينما يكون شكل عزوم الانحناء شكلاً مضلعاً.
- في حالة العزوم المركزة تكون قيم القوى العمودية وقوى القص ثابتة على طول محور المنشأ، بينما يحدث تغير مفاجئ في شكل عزوم الانحناء عند مكان تأثير العزم المركز وهذا التغير يساوي قيمة العزم المركز.