Uniform Continuity — محاضرة (7)

نظرية :- بفرض أن I فترة ما مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}$ ، وكانت $f: I \to R$ متصلة على I فإنها تكون متصلة بانتظام عليها.

البرهان :- بفرض أن f ليست متصلة بانتظام على الفترة I

$\therefore \exists\ \varepsilon_0 > 0,\ (x_n), (y_n) \in I \ni |x_n - y_n| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

وبما أن I فترة محدودة $\Leftarrow$ (x_n) متتابعة محدودة . وباستخدام نظرية بولزانو ويسترايس

$\Leftarrow$ يوجد متتابعة جزئية (x_{n_k}) من (x_n) وهي متتابعة تقاربية إلى عدد ما α .

و $\because$ I فترة محدودة $\Leftarrow$ $\alpha \in I$. وبالمثل نجد أنه يوجد متتابعة جزئية (y_{n_k}) أيضا تقاربية إلى عدد ما β ، $\beta \in I$

$\therefore |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow |x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow |x_{n_k} - y_{n_k}| \to 0 \quad as\ k \to \infty$

$\therefore (y_{n_k}) \to \alpha,\ (x_{n_k}) \to \alpha \quad as\ k \to \infty.$

or يوجد متتابعة جزئية (y_{n_k}) تقاربية إلى العدد α

$$|y_{n_k} - \alpha| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - z| = \varepsilon + \varepsilon \quad as\ k \to \infty.$$

$\because f(z)$ دالة متصلة عند النقطة α $\Leftarrow$ $\cancel{|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon}$ $\therefore$ كلا المتتابعين $(f(x_{n_k}))$ ، $(f(y_{n_k}))$ تكون تقاربية إلى $f(\alpha)$ لكن هذا غير ممكن لأن

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ الفرض خاطئ وبالتالي تكون الدالة f متصلة بانتظام اذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة

or $\because f(z)$ دالة متصلة عند النقطة α

$f(y_{n_k}) \to f(\alpha)$ and $\therefore f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$

$\therefore f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$

وهذا يتعارض مع الفرض أن $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$

نظرية :- بفرض أن $A \subseteq R$ ، $f: A \to R$ فإن العبارات الآتية متكافئة :-

① f ليست متصلة بانتظام على A .

② يوجد عدد $\varepsilon_0 > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ يوجد عدد $x, y \in A$ بحيث أن

$|x - y| < \delta$ and $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$

③ يوجد عدد $\varepsilon > 0$ ، ومتتابعتين (x_n) ، (y_n) من A بحيث

$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$ and $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

$\boxed{1}$ اثبت أن $x\in[0,2]$ ([0,1]) ، $g(x)=\sqrt{x}$ لا تحقق شرط ليبشيتز.

∵ $g(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,2]$ ، $I=[0,2]$ فترة مغلقة ومحدودة $\Leftarrow$ f متصلة بانتظام. ولكن لا يوجد عدد $k>0$ بحيث أن

$$|g(x)|\le k|x| \qquad \forall\, x\in I \qquad (y=0)$$

(لماذا) نفرض أن $k>0$ بحيث أن $|g(x)|\le k|x|$. فبأخذ $x=\frac{1}{n^2}\in[0,2]$

$$\therefore\ \left|g\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right|\le k\left|\tfrac{1}{n^2}\right| \Rightarrow \sqrt{\tfrac{1}{n^2}}\le k\,\tfrac{1}{n^2} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\le\frac{k}{n^2} \Rightarrow 1\le\frac{k}{n} \qquad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

وهذا محال لأن $\left(\frac{k}{n}\right)\longrightarrow 0$ عندما $n\longrightarrow\infty$

∴ الفرض خطأ وبالتالي فإنه لا يوجد عدد $k>0$ بحيث $|g(x)|\le k|x|$ $\Leftarrow$ لا تحقق شرط ليبشيتز.

س : هل كل دالة متصلة بانتظام تحقق شرط ليبشيتز ؟؟

$\boxed{2}$ ادرس الاتصال المنتظم للدالة $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$

بأخذ $A=[0,2]\cup[1,\infty)$ وحيث أن $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة بانتظام عند $[0,2]$ ، وكذلك عند $[1,\infty)$

∴ f منتظمة بانتظام على $A=[0,\infty)$.

$\boxed{3}$ اثبت أن $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$ متصلة بانتظام على R

$\forall\, x,y\in\mathbb{R}$

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\right|=\left|\frac{y-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|$$

$$=\frac{|(x-y)(x+y)|}{(1+x^2)(1+y^2)}=|x-y|\,\frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\le |x-y|\left[\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)}+\frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)}\right]$$

$$\because\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2>0\Rightarrow 1+x^2>\phi\Rightarrow\frac{1}{1+x^2}<1\Rightarrow\frac{|x|}{1+x^2}<1$$

and $\frac{|y|}{1+y^2}<1$

$$\Leftrightarrow \frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)}<\frac{1}{1+y^2}<1\ ,\ \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$\frac{|x|}{1+x^2}+\frac{|y|}{1+y^2}<1+1\Rightarrow\frac{|x|}{2(1+x^2)}+\frac{|y|}{2(1+y^2)}<1$$

$$\therefore\ |f(x)-f(y)|\le|x-y|\left(\frac{1}{2(1+y^2)}+\frac{1}{2(1+x^2)}\right)$$

$$\le|x-y|$$

نظرية الاتساع المتصل :-

في الجزء السابق تعرضنا إلى أمثلة من الدوال المتصلة ولكن ليست متصلة بانتظام على فترة مغلقة مفتوحة مثل الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ المعرفة على الفترة $(0,1)$. بالإضافة إلى أن الدوال التي تكون متصلة ~~بـ~~ على فترة مغلقة ومحدودة دائما تكون متصلة بانتظام. وفي هذا الجزء سوف ندرس الشروط التي تكون عندها الدالة متصلة بانتظام على فترة محدودة ومفتوحة.

نظرية :-

اذا كانت الدالة $f: A \to R$ متصلة بانتظام على $A \subset R$ ، واذا كانت (x_n) متتابعة كوشي على A فإن $(f(x_n))$ متتابعة كوشي على R.

الاثبات :- بفرض أن (x_n) متتابعة كوشي

$$\forall \delta>0 \quad \exists N(\delta) \ni |x_n - x_m| < \delta \quad \forall n,m > N(\delta)$$

وبفرض أن f متصلة بانتظام على A

$$\therefore \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ni |f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad \text{when } |x-y|<\delta \quad \forall x,y\in A$$

$\because$ $(x_n),(x_m) \in A$ متتابعين من A $\Leftarrow$

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon \qquad \text{when } |x_n - x_m|<\delta \,.\ \forall n,m>N(\delta)$$

$\therefore$ المتتابعة $(f(x_n))$ متتابعة كوشي.

نظرية الاتساع المتصل :-

الدالة f متصلة بانتظام على الفترة (a,b) اذا وفقط اذا كانت الدالة الموسعة لها متصلة على الفترة $[a,b]$.

الدالة الموسعة :-

اذا كانت $f(x)$ معرفة على (a,b) وكان

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = a_1 \ , \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = b_1$$

فإن الدالة الموسعة للدالة $f(x)$ تعرف كالآتي :-

$$F(x) = \begin{cases} a_1 & x=a \\ f(x) & x\in(a,b) \\ b_1 & x=b. \end{cases}$$

مثال :- ادرس الاتصال المنتظم للدالة f المعرفة بالصورة $f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x\in(0,1)$

الدالة تكون متصلة بانتظام اذا أمكن تعريفها عند 1 ، 0 بحيث تكون الدالة الموسعة لها متصلة على $[0,1]$.

$\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ غير موجودة $\qquad -1 \le \sin(1/x) \le 1$

$$-1 < \lim_{x\to 0} \sin(1/x) < 1$$

∴ لا يمكن تعريف الدالة عند الصفر . أي أن الدالة الموسعة ليست متصلة عند الصفر وبالتالي الدالة ليست متصلة بانتظام.

مثال:. ادرس الاتصال المنتظم للدالة f المعرفة بالصورة $f(x) = x\sin(1/x) \quad \forall\, x \in (0,1)$

$$\because \quad -1 \leq \sin(1/x) \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -x \leq x\sin(1/x) \leq x$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} -x \leq \lim_{x \to 0^+} x\sin(1/x) \leq \lim_{x \to 0^+} x$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 1^-} x\sin(1/x) = \sin 1$$

∴ الدالة الموسعة للدالة f هي

$$\therefore \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\sin(1/x) & x \in (0,1) \\ \sin 1 & x = 1. \end{cases}$$

وهي دالة متصلة على $[0,1]$ ومن ثم تكون f منتظمة الاتصال على $(0,1)$

الدوال الخطوية:.

تعريف:. الدالة $f: \cancel{[a,b]} \to R$ حيث I فترة ما من R تسمى دالة خطوية (step function) اذا كان لها عدد نهائي من القيم الثابتة المختلفة كل قيمة لها تقع في فترة أو أكثر من I.

$$\text{i.e.} \quad f(x) = C_K \quad \forall\, x \in I_K \;,\; K = 1, 2, \dots, n$$

مثال:. الدالة الآتية تكون خطوية على الفترة $[-2, 4]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 \leq x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1/2 \\ 3 & 1/2 \leq x < 1 \\ -2 & 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

نظرية :- بفرض أن I فترة مغلقة ومحدودة وكانت f دالة حقيقية متصلة على I

اذا كان $\varepsilon>0$ فإنه يوجد دالة خطوية $S_\varepsilon : I \longrightarrow R$ بحيث أن

$$|f(x) - S_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \forall \; x \in I$$

البرهان :- ∵ I فترة مغلقة ومحدودة ، $f: I \to R$ دالة متصلة على I $\Leftarrow$ f دالة ~~[متصلة بانتظام]~~

منتظمة الاتصال

$$\therefore \; \forall \; \varepsilon>0 \quad \exists \; \delta(\varepsilon)>0 \quad \ni \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon , \text{ when } \; |x-y| < \varepsilon \quad \forall \; x,y$$

بفرض $I=[a,b]$ ، $m \in IN$ عدد كبير جداً بحيث أن $h = \frac{b-a}{m} < \delta(\varepsilon)$. نقسم الفترة I إلى m

فترة طولها h بحيث

$$I_1 = [a, a+h] , \quad I_k = (a+(k-1)h , \; a+kh) , \quad k=2, \dots, m .$$

∵ طول كل فترة جزئية من I = $\delta(\varepsilon) > h$

$$\therefore \; \forall \; x_1, y_1 \in I_k \Rightarrow |f(x_k) - f(y_1)| < \varepsilon .$$

والآن سنعرف الدالة $S_\varepsilon(x)$

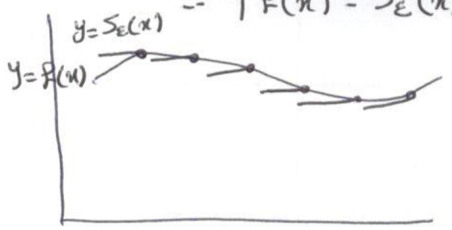
$$S_\varepsilon(x) = f(a+kh) \quad \forall \; x \in I_k , \quad k=1,2,\dots,m .$$

∵ $S_\varepsilon(x)$ قيمة ثابتة على I_k $\Leftarrow$ S_ε دالة خطوية . كما أن

$$|f(x) - S_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(a+kh)| < \varepsilon$$

لأن f دالة متصلة [بانتظام]

$$\therefore \; |f(x) - S_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \forall \; x \in I .$$



أسئلة محلولة :- على الفئة A ، $A \subset R$

$\boxed{1}$ اذا كانت f ، g دوال منتظمة الاتصال فاثبت أن $f+g$ دالة منتظمة الاتصال على A

الحل :- ∵ $f: A \to R$ دالة منتظمة الاتصال $\Leftarrow$

$$\forall \; \varepsilon>0 , \; \exists \; \delta_1>0 \text{ such that } |f(x)-f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ for any } |x-y| < \delta_1 \quad \forall x,y \in A$$

∵ g دالة منتظمة الاتصال على A $\Leftarrow$

$$\forall \; \varepsilon>0 \; \exists \; \delta_2>0 \text{ such that } |g(x)-g(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ for any } |x-y| < \delta_2 \quad \forall x,y \in A$$

وباختيار $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\therefore \; \forall \; \varepsilon>0, \; x,y \in A \ni |x-y| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x)+g(x) - f(y) - g(y)| < |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| = \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \dots$$

$$\therefore \; \forall \; \varepsilon>0 , x,y \in A , \; |x-y| < \delta , \; \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(x)| < \varepsilon$$

∴ $f+g$ دالة منتظمة الاتصال

[٢] اذا كانت $A \subseteq R$ ، f ، g دوال منتظمة الاتصال على A و كانت كلتا الدوال محدودة على A فاثبت أن حاصل ضربها $f \cdot g$ دوال منتظمة الاتصال على A

الحل :

$\because$ f ، g دوال محدودة على A $\Leftarrow$

$\therefore \exists M > 0$ such that

$$|f(x)| < M \quad \forall x \in A \quad \text{and} \quad |g(x)| < M \quad \forall x \in A$$

$$|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| = |f(x) \cdot g(x) - f(x)\,g(y) + f(x)\,g(y) - f(y)\,g(y)|$$

$$< |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + |g(y)|\,|f(x) - f(y)|$$

$$< M\,|g(x) - g(y)| + \cancel{g(y)}\; M\,|f(x) - f(y)| \longrightarrow (1)$$

$\because$ f ، g دوال منتظمة الاتصال $\Leftarrow$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \;\; |x - y| < \delta, \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\text{and} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

ومن المعادلة (1)

$$\therefore |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \text{whenever} \quad |x - y| < \delta$$

$\therefore$ $f \cdot g$ دوال منتظمة الاتصال.

[٣] اذا كانت $f(x) = x$ ، $g(x) = \sin x$ اثبت أن f ، g دوال منتظمة الاتصال لكن حاصل ضربهم دالة ليست منتظمة الاتصال على R.

الحل :

نفرض أن $h = f \cdot g = x \sin x \quad \forall x \in R$

نأخذ $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ ، $x_n = 2n\pi$ ، $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - y_n| = \left|\tfrac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty$$

$$|h(x_n) - h(y_n)| = |2n\pi \sin(2n\pi) - (2n\pi + \tfrac{1}{n}) \sin(2n\pi + \tfrac{1}{n})|$$

$$= |(2n\pi + \tfrac{1}{n}) \sin(\tfrac{1}{n})| = 2n\pi \sin(\tfrac{1}{n}) + \frac{1}{n} \sin(\tfrac{1}{n})$$

$$\because \lim_{n \to \infty} n \sin(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(1/n)}{(1/n)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} 2n\pi \sin(\tfrac{1}{n}) = 2\pi$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin 1/n}{n} = \cancel{\lim_{n\to\infty}}\; 0$$

$$|h(x_n)-h(y_n)| \longrightarrow 2\pi \quad \text{as } n\to\infty$$

بفرض أن $\varepsilon=\pi$ $\Leftarrow$ يوجد عدد $k\in N$ بحيث أن

$$2\pi-\varepsilon < h(x_n)-h(y_n) < 2\pi+\varepsilon$$

$$h(x_n)-h(y_n) > \pi$$

$$|h(x_n)-h(y_n)| > \pi = \varepsilon$$

$\therefore$ h ليست منتظمة الاتصال على R.

④ اذا كانت f ، g دوال منتظمة الاتصال على R فاثبت أن تحصيل الدالتين $f\circ g$ دالة منتظمة الاتصال.

الحل: $\because$ f دالة منتظمة الاتصال على R

$$\therefore \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ni |f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad \text{whenever} \quad |x-y|<\delta \quad ①$$

$\because$ g دالة منتظمة الاتصال على R

$$\therefore \forall \delta>0 \ \exists \delta'>0 \ni |g(x)-g(y)|<\delta \quad \text{whenever} \quad |x-y|<\delta' \quad ②$$

$\therefore$ من (1) ، (2) نحصل على

$$\text{whenever} \quad |x-y|<\delta' \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$\therefore$

$$|x-y|<\delta' \Rightarrow |f\circ g(x)-f\circ g(y)|<\varepsilon$$

$\therefore$ $f\circ g$ دالة منتظمة الاتصال.