

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الدوال الخاصة

كلية العلوم – الفرقة الرابعة – قسم الرياضيات

دالة بيسل

د. هدي حمدان مرداش

2020

Bessel Function

دالة بيسل

Book(page 26)

دالة بيسل تحل المعادلة التفاضلية وهي

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0 \quad (1)$$

لحل المعادلة السابقة نفرض

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

بالتفاضل بالنسبة ل x مرتين والتعويض في المعادلة (1) ثم مقارنة الحدود نحصل علي J_n دالة بيسل وهي دالة في متغير واحد x

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad (*)$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

ملحوظة : بالنسبة للاثبات غير مطلوب لامتحان ولكن بالنسبة لقسم الرياضيات (علوم – تربية) يجب فكه وفهمه جيدا. ويلزم حفظ الصورة الأخيرة (*). يمكن كتابة دالة بيسل $J_n(x)$ او J_n فقط.

Recurrence Relations: (العلاقات التكرارية)

(مهمة مطلوبة من جميع الشعب بالاثبات).

$$1. \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}.$$

$$2. \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n-1}.$$

$$3. x J_n' = x J_{n-1} - n J_n.$$

$$4. x J_n' = n J_n - x J_{n-1}.$$

$$5. J_n' = \frac{1}{2} (J_{n-1} - J_{n+1}).$$

$$6. 2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

$$1. \frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1}$$

Proof

نكتب دالة بيسل J_n ثم بالضرب x^n

$$J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^n}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

نجمع الأسس الخاصة ب x ثم نفاضل بالنسبة ل x

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1) 2^{n+2r}} x^{2n+2r}$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2n+2r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1) 2^{n+2r}} x^{2n+2r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1) 2^{n+2r-1}} x^{2n+2r-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}, \quad \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+r)} = \Gamma(n+r)$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} = x^n J_{n-1}.$$

$$2. \frac{d}{dx} (x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n-1}.$$

مثل برهان رقم (1) مع الاخذ في الاعتبار $-n$ بدلا من n

$$3. xJ'_n = xJ_{n-1} - nJ_n.$$

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n) = x^n J_{n-1} \quad \text{باستخدام العلاقة الاولى}$$

بتطبيق التفاضل علي الطرف الأول نحصل علي

$$x^n J'_n + n x^{n-1} J_n = x^n J_{n-1}$$

بالقسمة علي x^{n-1}

$$xJ'_n + n J_n = x J_{n-1}$$

$$\text{Or} \quad xJ'_n = x J_{n-1} - n J_n$$



4. $xJ'_n = nJ_n - xJ_{n-1}$.

مثل برهان رقم (3) مع الاخذ في الاعتبار $-n$ بدلا من n

• بجمع (3) و(4) نحصل علي العلاقة (5)

• بطرح (3) من (4) نحصل علي (6)

5. $J'_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$.

6. $2nJ_n = x(J_{n+1} + J_{n-1})$



Generation Function for $J_n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}$

Keep it is important but the proof for reading.

Worked out Problems

1. $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

Solution:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

بوضع $-x$ بدلاً من x

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{-x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= (-1)^n J_n(x) \end{aligned}$$

Find J_0, J_1

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

بالتعويض عن $n=0$ ثم بفك المجموع علي r . (فك المجموع يعني التعويض عن r ابتداءً من الصفر ثم 1 ثم 2 وهكذا)

$$J_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$$

$$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma 3 \Gamma(3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

$$\text{So, } J_0(0) = 1, J_0(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \dots, \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}$$

$$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^1 + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

So, $J_1(0) = 0, J_1(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots$

بالنسبة ل J_2, J_3, J_4, \dots يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل استخدام العلاقات

التكرارية والحصول عليهم بدلالة J_0, J_1 وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

عند $n = 1$

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$2 J_1 = x (J_2 + J_0)$$

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$


عند $n = 2$

$$2 J_2 = x (J_3 + J_1)$$

$$2 \left(\frac{2}{x} J_1 - J_0 \right) = x (J_3 + J_1)$$

$$J_3 = \left(\frac{8 - x^2}{x^2} \right) J_1 - \frac{4}{x} J_0$$

و عند $n = 3$ نحصل علي J_4 وهكذا.


$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

الاثبات بنفس الطريقة السابقة بالتعويض عن $n = \frac{1}{2}$ في دالة بيسل نحصل علي

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned}$$

By the same way $J_{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

ملحوظة: نحتاج نحفظ صيغة $J_{\frac{-1}{2}}$ و $J_{\frac{1}{2}}$ لاستخدامها في حلول باقي المسائل.

بالنسبة لـ $J_{\frac{3}{2}}, J_{\frac{-3}{2}}, J_{\frac{5}{2}}, J_{\frac{-5}{2}}$ يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل استخدام العلاقات التكرارية والحصول عليهم بدلالة $J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{-1}{2}}$ وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

عند $n = 1/2$

$$2n J_n = x (J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$J_{1/2} = x (J_{3/2} + J_{-1/2})$$

$$J_{3/2} = \frac{1}{x} J_{1/2} - J_{-1/2} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

عند $n = 3/2$

$$3 J_{3/2} = x (J_{5/2} + J_{1/2})$$

$$J_{5/2} = \frac{3}{x} J_{3/2} - J_{1/2} = \frac{3}{x} \left(\frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\left(\frac{3 - x^2}{x^2} \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right]$$

طلابي الأعداء بالنسبة للشعب الغير متخصصة (الكيمياء –
الفيزياء) مطلوب منكم من مثال رقم (1) الي مثال رقم (10).

أما بالنسبة للطلاب المتخصصين رياضيات (كلية العلوم – كلية
التربية) هنكمل باقي الأمثلة وندناقش فيها ع جروب الواتساب.

وبالنسبة للتمارين الغير محلولة مطلوب من جميع الشعب حل
أول 18 تمارين في أختار من متعدد (42, 43, 44) Page.
وسؤال صح أو خطأ (page 49).

كونوا متفائلين.
ودمتم سالمين



شكراً لكم
مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق