بسم الله الرحمن الرحيم

الدوال الخاصة

كلية العلوم – الفرقة الثالثة – شعبة الإحصاء والحاسب الالي

دالة بيسل

د. هدي حمدان مرداش

2020

Bessel Function

دالة بيسل

Book(page 26)

دالة بيسل تحل المعادلة التفاضلية وهي

$$x^2\ \frac{d^2y}{dx^2} + x\ \frac{dy}{dx} + \left(x^2\ - n^2\right) y = 0 \qquad (1)$$

لحل المعادلة السابقة نفرض

$$y = \ \sum_{r=0}^{\infty} a_r\ x^{k+r}$$

بالتفاضل بالنسبة ل x مرتين والتعويض في المعادلة (1) ثم مقارنة الحدود نحصل علي J_n دالة بيسل وهي دالة في متغير واحد x

$$J_n(x) = \ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \qquad (*)$$

$$J_{-n}(x) = \ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

ملحوظة : بالنسبة للاثبات غير مطلوب للامتحان ولكن بالنسبة لقسم الرياضيات (علوم – تربية) يجب فكه وفهمه جيدا. ويلزم حفظ الصورة الأخيرة (*).
يمكن كتابة دالة بيسل J_n (x) او J_n فقط.

Recurrence Relations: (العلاقات التكرارية)

(مهمة مطلوبة من جميع الشعب بالاثبات).

1. $\frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}$.
2. $\frac{d}{dx}(x^{-n} J_n) = -x^{-n} J_{n-1}$.
3. $xJ'_n = xJ_{n-1} - nJ_n$.
4. $xJ'_n = nJ_n - xJ_{n-1}$.
5. $J'_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$.
6. $2n\, J_n = x\,(J_{n+1} + J_{n-1})$

$$1.\quad \frac{d}{dx}(x^n J_n) = x^n J_{n-1}$$

Proof

نكتب دالة بيسل J_n ثم بالضرب x^n

$$J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^n}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

نجمع الأسس الخاصة ب x ثم نفاضل بالنسبة ل x

$$x^n J_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)\, 2^{n+2r}}\, x^{2n+2r}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (2n+2r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)\, 2^{n+2r}}\, x^{2n+2r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)\, 2^{n+2r-1}}\, x^{2n+2r-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}, \qquad \frac{\Gamma(n+r+1)}{(n+r)} = \Gamma(n+r)$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} = x^n J_{n-1}.$$

$$2.\ \frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}J_{n-1}.$$

مثل برهان رقم (1) مع الاخذ في الاعتبار n– بدلا من n

$$3.\quad xJ_n' = xJ_{n-1} - nJ_n.$$

باستخدام العلاقة الاولي $\frac{d}{dx}(x^nJ_n) = x^nJ_{n-1}$

بتطبيق التفاضل علي الطرف الأول نحصل علي

$$x^n J_n' + n\,x^{n-1}J_n = x^nJ_{n-1}$$

بالقسمة علي x^{n-1}

$$xJ_n' + n\,J_n = x\,J_{n-1}$$

Or $\quad xJ_n' = x\,J_{n-1} - n\,J_n$

4. $xJ'_n = nJ_n - xJ_{n-1}$.

مثل برهان رقم (3) مع الاخذ في الاعتبار n– بدلا من n

- بجمع (3) و(4) نحصل علي العلاقة (5)
- بطرح (3) من (4) نحصل علي (6)

5. $J'_n = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})$.
6. $2n\,J_n = x\,(J_{n+1} + J_{n-1})$

Generation Function for $\boldsymbol{J_n = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}$

Keep it is important but the proof for reading.

Worked out Problems

1. $J_n(\text{-x}) = (-1)^n J_n(\text{x})$

Solution:

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

بوضع x– بدلاً من x

$$J_n(-x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{-x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$= (-1)^n J_n(x)$$

Find J_0, J_1

$$J_n(\mathbf{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} (\frac{x}{2})^{n+2r}$$

بالتعويض عن n = 0 ثم بفك المجموع علي r. (فك المجموع يعني التعويض عن r ابتداءاً من الصفر ثم 1 ثم 2 وهكذا)

$J_0(\mathrm{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+1)} (\frac{x}{2})^{2r}$

$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+1)} (\frac{x}{2})^{0} + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+1)} (\frac{x}{2})^{2} + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+1)} (\frac{x}{2})^{4} + \; ....$

$= 1 - (\frac{x}{2})^{2} + \frac{1}{\Gamma 3 \Gamma(3)} (\frac{x}{2})^{4} - \; ....$

$= 1 - (\frac{x}{2})^{2} + \frac{1}{2!} (\frac{x}{2})^{4} - \; ....$

So, $J_0(0) = 1$, $J_0(1) = 1 - (\frac{1}{2})^{2} + \frac{1}{2!} (\frac{1}{2})^{4} - \; ....,\; ....$

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}$$

$$= \frac{(-1)^0}{\Gamma(0+1)\Gamma(0+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1} + \frac{(-1)^1}{\Gamma(1+1)\Gamma(1+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{3} + \frac{(-1)^2}{\Gamma(2+1)\Gamma(2+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{5} + \dots$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{3} + \frac{1}{2!\,3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{5} - \dots .$$

So, $J_1(0) = 0$, $J_1(1) = = \frac{1}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \frac{1}{2!\,3!} \left(\frac{1}{2}\right)^{5} - \dots .$

بالنسبة ل J_2, J_3, J_4 , ... يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل أستخدام العلاقات التكرارية والحصول عليهم بدلالة J_0, J_1 وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n\, J_n = x\left(J_{n+1} + J_{n-1}\right)$$

عند n = 1

$$2n\,J_n = x\,(J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$2\,J_1 = x\,(J_2 + J_0)$$

$$J_2 = \frac{2}{x} J_1 - J_0$$

عند n = 2

$$2\,J_2 = x\,(J_3 + J_1)$$

$$2\left(\frac{2}{x} J_1 - J_0\right) = x\,(J_3 + J_1)$$

$$J_3 = \left(\frac{8 - x^2}{x^2}\right) J_1 - \frac{4}{x} J_0$$

و عند n = 3 نحصل علي J_4 وهكذا.

$$\boldsymbol{J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x}$$

الاثبات بنفس الطريقة السابقة بالتعويض عن $n = \frac{1}{2}$ في دالة بيسل نحصل علي

$$J_{\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\frac{3}{2})} (\frac{x}{2})^{n+2r}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

By the same way $J_{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

ملحوظة: هنحتاج نحفظ صيغة $J_{\frac{-1}{2}}$ و $J_{\frac{1}{2}}$ لاستخدامها في حلول باقي المسائل.

بالنسبة ل$J_{\frac{-5}{2}}$ $J_{\frac{5}{2}}$, $J_{\frac{-3}{2}}$, $J_{\frac{3}{2}}$ يمكن حسابها بنفس الطريقة ولكن يفضل أستخدام العلاقات التكرارية

والحصول عليهم بدلالة $J_{\frac{-1}{2}}$, $J_{\frac{1}{2}}$ وذلك باستخدام العلاقة التكرارية رقم (6)

$$2n\, J_n = x\,(J_{n+1} + J_{n-1})$$

عند $n = 1/2$

$$2n\, J_n = x\,(J_{n+1} + J_{n-1})$$

نحصل علي

$$J_{1/2} = x\,(J_{3/2} + J_{-1/2})$$

$$J_{3/2} = \frac{1}{x} J_{1/2} - J_{-1/2} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathbf{\sin x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\boldsymbol{\cos x}$$

عند $n = 3/2$

$$3\, J_{3/2} = x\,(J_{5/2} + J_{1/2})$$

$$J_{5/2} = \frac{3}{x} J_{3/2} - J_{1/2} = \frac{3}{x}\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathbf{\sin x} - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\boldsymbol{\cos x}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathbf{\sin x}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\;\left[\left(\frac{3 - x^2}{x^2}\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right]$$

طلابي الأعزاء بالنسبة للشعب الغير متخصصة (الكيمياء – الفيزياء) مطلوب منكم من مثال رقم (1) الي مثال رقم (10).

أما بالنسبة للطلاب المتخصصين رياضيات (كلية العلوم – كلية التربية) هنكمل باقي الأمثلة ونتناقش فيها ع جروب الواتساب.

وبالنسبة للتمارين الغير محلولة مطلوب من جميع الشعب حل أول 18 تمارين في أختر من متعدد (Page(42, 43, 44. وسؤال صح أو خطأ (page 49).

كونوا متفائلين.
ودمتم سالمين

شكراً لكم
مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق