الأساس للفراغ التوبولوجي ومسلمات 1st و 2nd العد
axiom of countability and 2nd

١- تعريف:

نفرض (X,τ) فراغ توبولوجي. العائلة الجزئية β من τ تسمى أساس للفراغ (X,τ) اذا كان الشرط التالي متحقق

$\forall G\in\tau,\ \forall x\in G\ \exists U\in\beta$ s.t. $x\in U\subset G$.

٢- مثال: كل مما يلي يمثل أساس للتوبولوجي العادي على R (تحقق من ذلك)

(i) $\{(a,b) : a,b\in R\}$

(ii) $\{(a,b) : a,b\in Q\}$

وكذلك أن ما يلي لا يمثل أساس للتوبولوجي العادي على R (اشرح السبب).

(i) $\{(n,n+1) : n\in Z\}$

(ii) $\{[a,b) : a,b\in R\}$

(iii) $\{(-\infty,b) : b\in R\}\cup\{(a,\infty) : a\in R\}$.

٣- حقيقة: لدينا فراغ جزئي A من فراغ توبولوجي X اذا كانت $\beta=\{U_\alpha : \alpha\in\Delta\}$ أساس لـ X فإن

$\beta_A=\{U_\alpha\cap A : U_\alpha\in\beta\}$

يمثل أساس لـ A.

٤- مثال: نفرض من الفقرة ٢ الاعتيادي على R وبأخذ A مجموعة جزئية من R بالشكل

(i) $A=[a,b)$ (ii) $A=Z$

اوجد التوبولوجي النسبي على A في i, ii اذا كان فقط على R: ١- التوبولوجي τ

٢- τ_{H_0}

٥- نظرية: نفرض (X, τ) فضاء توبولوجي و β أساس لـ τ فإن β تحقق

a) $\forall x \in X \ \exists U \in \beta : x \in U \subset X$

b) $\forall U, V \in \beta, \ \forall x \in U \cap V \ \exists W \in \beta :$

$x \in W \subset U \cap V.$

٦. نظرية: نفرض $X \neq \phi$ وأن $\beta \subset P(X)$ عائلة من المجاميع الجزئية من X وأنها تحقق

a) $\forall x \in X \ \exists U \in \beta : x \in U \subset X$

b) $\forall U, V \in \beta, \ \forall x \in U \cap V \ \exists W \in \beta : x \in W \subset U \cap V.$

فإن β أساس لتوبولوجي وحيد على X له β أساس وهو أصغر توبولوجي على X يحتوي العائلة β.

البرهان: بأخذ $\tau(\beta)$ هي عائلة كل الاتحادات الممكنة لعناصر β. لإثبات النظرية يكفي إثبات أن $\tau(\beta)$ بالإضافة ϕ تكون توبولوجي، ومن تكون $\tau(\beta)$ تكون β أساس $\tau(\beta)$، وفي حالة وجود توبولوجي آخر τ على X له β أساس فإن $\tau(\beta) = \tau$.

أيضاً نفرض τ أي توبولوجي آخر على X يحتوي β كذلك τ باعتباره توبولوجي ويحتوي β فهو يحتوي كل الاتحادات الممكنة لعناصر β أي يحتوي $\tau(\beta)$.

لإثبات أن $\tau(\beta)$ توبولوجي على X نلاحظ أنه من تركيبة $\tau(\beta)$ والشرط (a) نجد أن $X, \phi \in \tau(\beta)$.

وحيث أن أي عنصر من $\tau(\beta)$ هو اتحاد لعناصر من β فإن لدي $\tau(\beta) \subset \tau^*$ لأن τ^* هو اتحاد لـ اتحادات من عناصر β هو عنصر من $\tau(\beta)$.

الآن نفرض $U, V \in \tau(\beta)$، من بناء $\tau(\beta)$ يكون

$$U = \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha , \quad V = \bigcup_{\gamma\in\Omega} V_\gamma$$

باستخدام الشرط (b) على β فإن $U_\alpha \cap V_\gamma$ هو اتحاد لعناصر من β اذا ان $U_\alpha \cap V_\gamma$ عنصر من $\tau(\beta)$ ولكن

$$U\cap V = \left(\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_{\gamma\in\Omega} (V_\gamma)\right) = \bigcup_{\substack{\alpha\in\Delta \\ \gamma\in\Omega}} \left(U_\alpha \cap V_\gamma\right) \in \tau(\beta).$$

وهذا يكمل اثبات ان $\tau(\beta)$ توبولوجي على X ويكون $\tau(\beta)$ يسمى بالتوبولوجي المولد بـ β.

تمرين: اثبت ان $\tau(\beta)$ هو التوبولوجي الوحيد له الأساس β وهو أصغر توبولوجي يحوي β.

عكس دمج النظريتين السابقتين نعطي النظرية التالية:

نظرية: نفرض $\beta \subset P(X)$ لمجموعة خالية X، فإن يوجد توبولوجي على X له β اساس فقط وفقط اذا كان

(a) $\forall x \in X \; \exists \, U \in \beta : x \in U$,

(b) $\forall U, V \in \beta , \; \forall x \in U\cap V \; \exists \, W \in \beta :$ $x \in W \subset U \cap V$.

تام ٠٦٠٢

تمرين (1)

كل مما يلي اساس لتوبولوجي على R كفضاء

صف ذلك ثم اوصف التوبولوجي الناتج

i) $\beta_1 = \{\{x,y\} : x,y \in R\}$

ii) $\beta_2 = \{[a,b) : a,b \in R\}$

iii) $\beta_3 = \{(-\infty, r) : r \in Q\}$

iv) $\beta_4 = \{(p,q) : p,q \in Q\}$

تمرين 2 : كل مما يلي لا يصلح ان يكون اساس لأي توبولوجي على R

i) $\beta_1 = \{(-\infty, a) : a \in R\} \cup \{(a,\infty) : a \in R\}$

ii) $\beta_2 = \{[a,b] : a \neq b, a,b \in R\}$

iii) $\beta_3 = \{\{x,y\} : x \neq y, x,y \in R\}$.

تمرين 3 : لنفرض (X, τ_X), (Y, τ_Y) فضائي توبولوجي

اثبت ان العائلة

$\beta = \{U \times V : U \in \tau_X, V \in \tau_Y\}$

اساس لتوبولوجي على $X \times Y$.

ملاحظة : $X \times Y$ مع التوبولوجي الناتج من تمرين 3 يسمى

فضاء الضرب للفضائيين X, Y.

تمرين 4 : اذا كان $X \times Y$ هو فضاء الضرب

للفضائيين X, Y وكانت β_X, β_Y اساسين

للفضائيين X, Y على الترتيب اثبت ان

$\beta = \{U \times V : U \in \beta_X, V \in \beta_Y\}$

اساس لفضاء الضرب $X \times Y$.

٨- نظرية: نفرض $\mathcal{A}$ - عائلة اختيارية غير خالية من الفئات الجزئية لفئة ما X. فإن عائلة كل التقاطعات النهائية المكملة لعناصر $\mathcal{A}$ بالإضافة لـ X تكون أساس لتوبولوجي على X.

البرهان: نفرض $\mathcal{A}$ - عائلة اختيارية من الفئات الجزئية لـ X و $\beta(\mathcal{A})$ هي عائلة كل التقاطعات النهائية المكملة لعناصر $\mathcal{A}$ بالإضافة لـ X.

من تعريف $\beta(\mathcal{A})$ يتضح ان أي عنصرين U, V من $\beta(\mathcal{A})$ تقاطعهم عنصر في $\beta(\mathcal{A})$ $X \in \beta(\mathcal{A})$. من النظرية في محاضرة (٧) $\beta(\mathcal{A})$ أساس لتوبولوجي على X.

النظرية في ٨ تكتب كتابة بالشكل

= نفرض $\mathcal{A}$ - عائلة اختيارية غير خالية من الفئات. فإن عائلة كل التقاطعات النهائية المكملة لعناصر $\mathcal{A}$ تكون أساس لتوبولوجي على الفئة $X = \cup\{S; S \in \mathcal{A}\}$.

العائلة $\mathcal{A}$ من الفئات تسمى أساس جزئي لتوبولوجي $\mathcal{J}$ إذا كان وفقط إذا كان عائلة كل التقاطعات النهائية لعناصر $\mathcal{A}$ تكون أساس لهذا التوبولوجي (أو بكلام آخر اذا كان كل عنصر في $\mathcal{J}$ ما هو إلا اتحاد لتقاطعات نهائية لعناصر $\mathcal{A}$.

من النظرية السابقة يتضح أن كل عائلة غير خالية $\mathcal{A}$ من الفئات تعتبر أساس جزئي لتوبولوجي ما. هذا التوبولوجي وحيد لـ $\mathcal{A}$ أساس جزئي ويعتبر أصغر توبولوجي يحتوي العائلة $\mathcal{A}$.

وا أن هذا التوبولوجي يحتوي $\mathcal{A}$ و يعتبر عائلة جزئية من اي توبولوجي آخر يحتوي $\mathcal{A}$.

٩ / ٥ / ٢٠٦

الفضاءات التوبولوجية التي تحتوي على أساس مرقم تسمى فضاءات تحقق المبدأ الثاني للترقيم

مثال: نفرض A فئة غير مرقمة من فضاء يحقق المبدأ الثاني للترقيم . اثبت ان A توجد نقطة حدية لـ A.

تعريف: الفئة A تسمى فئة كثيفة في الفضاء التوبولوجي X فقط وفقط اذا كان $[A]=X$.

وفي حالة وجود فئة كثيفة مرقمة من فضاء X يسمى X فضاء منفصل (separable)

الفضاء المنفصل ليس بالضرورة ان يكون محققا للمبدأ الثاني للترقيم . على سبيل المثال باعتبار الفضاء (X, ح) حيث X فئة غير مرقمة و هذا الفضاء كل فئة لا نهائية تتقاطع مع كل الفئات المفتوحة.

نفرض أن X تحتوي أساس مرقم B . تقاطع كل الفئات المفتوحة باحتوائها x نقطة ما في X ، التي تحتوي x هي بالضبط {x} لأن مكمل اي فئة تقطعها {$y\neq x$} هي فئة مفتوحة و تحتوي x . من هنا يتضح ان تقاطع كل الفئات المفتوحة التي هي عناصر في B و تحتوي x هي {x} ، وتستعمل هذا التقاطع المرقم من الفئات هو اتحاد عدد مرقم من الفئات المنتهية وهو مرقم ، هذا يؤدي الى تناقض حيث مكمل التقاطع هو في نفس الوقت مكمل {x} اي $X\setminus\{x\}$ ومن ثم غير مرقمة.

الغطاء $\mathcal{U}=\{A_\alpha : \alpha\in\Delta\}$ تسمى غطاء لفئة B اذا كانت $B\subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$ ، اي اذا كان $x\in B$ يوجد $A_\alpha\in\mathcal{U}$ حيث $x\in A_\alpha$

الغطاء الجزئي من $\mathcal{U}$ والذي تعتبر غطاء لـ B

٢٠١٠/٥/٢٠

٧ - ٣.٤.٧ توبولوجي

الأساس المحلي ، فرضية العد الأولى والثانية
Local basis, 1st and 2nd axiom of countab.

تعريف : نفرض ان (X, τ) فراغ توبولوجي وان $x \in X$ نقطة ما.
العائلة β_x من فئات مفتوحة تحتوي x تسمى اساس محلي عند النقطة x إذا وفقط اذا كان
$\forall$ U-open, $x \in U$ $\exists V \in \beta_x : p \in V \subset U$.

الأساس المحلي عند نقطة $x \in X$ موجود دائماً العائلة β_x المكونة من كل الفئات المفتوحة من الفراغ التي تحتوي x هي بالفعل اساس محلي.
من تصنيفات الفراغات التوبولوجية هي اذا كان يوجد اساس محلي مرقم عند كل نقطة من عدمه.

تعريف : (The first axiom of countab) الفراغ X يسمى 1st countable اذا وفقط اذا كان لكل $x \in X$ يوجد اساس محلي لـ X عند النقطة x.

١- كل فراغ متري هو احادي الترقيم
٢- الفراغ المتقطع احادي الترقيم لأنه لكل فئة مفتوحة U تحتوي x توجد الفئة $\{x\}$ المفتوحة وتحقق $x \in \{x\} \subset U$. لذلك $\{x\}$ تشكل اساس محلي عند x.
٣- الفراغ (R, τ_u) - أحادي الترقيم لأنه لكل $x \in R$ العائلة
$$\beta_x = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) ; n \in N\}$$
عائلة فئات مفتوحة تحتوي x وهي مرقمة وتحقق الشرط من تعريف τ_u وخاصية ارخميدس للاعداد الحقيقية.

تمرين:

١- الفضاءات (R,τ_c) ، $(X,\tau(x_0))$ ، (X,τ_{x_0}) تحقق المبدأ الأول للعد اشرح ذلك.

٢- الفضاء (R,τ_{co}) لا يحقق المبدأ الأول للعد وضح ذلك.

٣- نفرض ان (X,τ) فضاء توبولوجي وان β base for τ . اثبت ان
$\beta_x=\{U\in\beta : x\in U\}$ basis at $x\in X$.

٤- نفرض ان (X,τ) فضاء توبولوجي وان β_x اساس محلي عند x اثبت ان

$$\beta=\bigcup_{x\in X}\beta_x$$

أساس لـ X .

ارشاد لحل مسألة 2-

نفرض وجود اساس معدود محلي عند $x\in R$ وليكن
$\beta_x=\{U_i : i\in N\}$
ونبين ان $\{x\}=\cap\beta_x$

$$\bigcap_{i\in N}U_i=\{x\}.$$

$$\therefore \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i\right)^c=\{x\}^c=R\setminus\{x\}$$

وحيث ان $(\cap U_i)^c=\cup U_i^c$ اتحاد معدود من المنتهيات
الخالية منته فهو معدود.

ما يعني $R\setminus\{x\}$ المعدودة.

نظرية :

نفرض X فراغ احادي الترقيم ، ولنفرض $x \in X$ ، اذن يوجد اساس محلي مرقم $\{U_n : n \in N\}$ عند x بحيث ان

a) $U_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in N$

b) ومن المرافقات التي حل $\{x\}$ عنه مغلقة تكون

$$\bigcap_{n \in N} U_n = \{x\}$$

البرهان: كون الفراغ احادي الترقيم يستلزم وجود اساس محلي مرقم $\{V_n : n \in N\}$ عند x. ونكون عائلة U_i حيث

$$U_1 = V_1 , \quad U_2 = V_1 \cap V_2 , \ \dots , \ U_n = V_1 \cap \dots \cap V_n , \dots$$

العائلة $\{U_i\}$ تكون اساس محلي عند x و $U_{n+1} \subset U_n$.

لو ثبات (b) لدينا $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$

نفرض ان يوجد $x \neq y$ حيث $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$

المجموعة $X \setminus \{y\}$ مفتوحة وتحوي x ، ومن تعريف الاساس المحلي يوجد U_k حيث

$$x \in U_k \subset X \setminus \{y\}$$

~~$y \in U_k$~~ وهذا يناقض ان

$$y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

تعريف : (The second axiom of countability)

نقول عن (X, τ) فراغ توبولوجي بانه X فراغ ثاني الترقيم اذا وجد اساس مرقم X

ثا م ٥ ٦ ٧

العلاقة بين احادية الدقيق وتناسية الدقيق

نظرية: كل فراغ تناسي الدقيق يكون احادي الدقيق ،
البرهان : غير بين .
الفراغ (X، τ) احادي الدقيق ولكنه تناسي الدقيق
فقط عندما تكون X قابلة للعد . (اشرح)
الفراغ (R، τ) فراغ تناسي الدقيق

نظرية : احادية الدقيق وكذلك تناسية الدقيق صفة
وراثية .

كل فراغ تناسي الدقيق هو فراغ separable . وليس بالضرورة
ان كون الفراغ يحوي فئة كثيفة قابلة للعد وجود
اساس قابل للعد للفراغ .

انظر تمرينات ارقام 4، 5، 6، 7، 9، 10 ص 164
" " " 1، 2، 8، { ص 158
تحقق من صحة المسألة 9
تمرينات ارقام 6، 7، 8، 9، 10، 11 ص 96