

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الدوال الخاصة

كلية العلوم – الفرقة الثالثة – أخصاء وعلوم الحاسب  
المحاضرة السابعة والثامنة

دالة لاجندر

د. هدي حمدان مرداش

2020

# Legendre's Functions

دالة لاجندر تحل المعادلة التفاضلية وهي

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n + 1) y = 0 \quad (1)$$

لحل معادلة لاجندر نفرض

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k-r}$$

بالتفاضل بالنسبة ل  $x$  مرتين والتعويض في معادلة لاجندر ثم مقارنة الحدود نحصل علي

## دالة لاجندر من النوع الأول

$$P_n(x) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!} \left( x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right)$$

## دالة لاجندر من النوع الثاني

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1.3.5\dots(2n+1)} \left( x^{-n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)} x^{n-5} - \dots \right)$$

# Rodrigue's Formula

صيغة رودريجوس

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

هي صيغة لدالة لاجندر وهي الصيغة الأشهر والأكثر استخداماً (تحفظ) يمكن بسهولة إثبات أنها تحقق معادلة لاجندر.

الإثبات : ( للقراءة والفهم فقط)

**ملحوظة:** سوف يتم التعامل مع النوع الأول للجنذر من خلال صيغة رودريجوس. كما أنه سيتم التعامل مع النوع الأول فقط.



To find  $P_n, n = 0, 1, 2, \dots$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d^1}{dx^1} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} (2x) = x$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dx^2} (x^4 - 2x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{8} \frac{dy}{dx} (4x^3 - 4x) = \frac{1}{8} (12x^2 - 4) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \end{aligned}$$

وهكذا يمكن حساب  $P_3, P_4, P_5, \dots$

ويمكن أيضاً حساب حدود كثيرات الحدود من  $P_3, P_4, P_5, \dots$  كالآتي:

$$1 = P_0, \quad x = P_1,$$

$$x^2 = \frac{2P_2 + P_0}{3}; \quad P_2 = \frac{3x^2 - P_0}{3}$$

n	$P_n$	$x^n$
0	1	$P_0$
1	x	$P_1$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{2P_2 + P_0}{3}$
3	$\frac{1}{2}x(5x^2 - 3)$	$\frac{2P_2 + P_0}{3}$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	$\frac{8P_4 + 20P_2 + 7P_0}{35}$

الجدول للتوضيح وليس للحفظ يمكن أستنتاج أي قيمة بداخله

## Generation Function

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n$$

مهمة جداً لا بد أن تحفظ والاثبات سهل جداً (للقراءة والفهم).

لاحظ أن دالة لاجندر دالة في متغير واحد هو  $x$   
أما الدالة المولدة فهي دالة في متغيرين  $(x, z)$



## Recurrence Relations:

(العلاقات التكرارية)

(مهمة مطلوبة بالاثبات).

$$1. (2n + 1)x P_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

$$2. x P'_n - P'_{n-1} = nP_n$$

$$3. (2n + 1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

$$4. (n + 1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$$

$$5. (1 - x^2) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$$

$$6. (1 - x^2) P'_n = (n + 1)(xP_n - P_{n+1})$$



$$1. (2n + 1)x P_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

Proof

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_0^{\infty} z^n P_n \quad (*)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة ل z

$$\frac{-1}{2} (1 - 2xz + z^2)^{-3/2} (-2x + 2z) = \sum_0^{\infty} n z^{n-1} P_n$$

$$(x - z)(1 - 2xz + z^2)^{-3/2} = \sum_0^{\infty} n z^{n-1} P_n$$

بضرب الطرفين في  $(1 - 2xz + z^2)$

$$(x - z)(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_0^{\infty} n (1 - 2xz + z^2) z^{n-1} P_n$$

By (\*)

$$(x - z) \sum_0^{\infty} z^n P_n = \sum_0^{\infty} (n P_n z^{n-1} - 2x n P_n z^n + n P_n z^{n+1})$$

بمقارنة معاملات  $z^n$  للطرفين نحصل علي

$$(2n + 1)x P_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

لاحظ أن للحصول علي معامل  $z^n$  من معامل  $z^{n-1}$  نعوض عن  $n$  ب  $n+1$   
 أن للحصول علي معامل  $z^n$  من معامل  $z^{n+1}$  نعوض عن  $n$  ب  $n-1$   
 دالة لاجندر

$$2. x P'_n - P'_{n-1} = nP_n$$

نفس خطوات (1) مع التفاضل بالنسبة ل  $x$ .

$$3. (2n + 1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

Proof

$$\text{By (1)} \quad (2n + 1)x P_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

نفاضل بالنسبة ل  $x$  (تذكر أن  $P_n$  دالة في  $x$ )

$$(2n + 1) P_n + (2n + 1) x P'_n = (n + 1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}$$

$$\text{By (2)} \quad (2n + 1) P_n + (2n + 1) (nP_n + P'_{n-1}) = (n + 1)P'_{n+1} + nP'_{n-1}$$

بالاختصار نحصل علي

$$(2n + 1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

$$4. (n + 1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$$

Proof

$$\text{By (3)} \quad (2n + 1)P_n = P'_{n+1} - P'_{n-1}$$

$$\text{By(2)} \quad (2n + 1)P_n = P'_{n+1} - (x P'_n - nP_n)$$

$$\text{Then } (n + 1)P_n = P'_{n+1} - x P'_n$$

$$5. (1 - x^2) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$$

Proof

$$\text{By (4)} \quad (n + 1)P_n = P'_{n+1} - xP'_n$$

باستبدال  $n$  ب  $(n-1)$  نحصل علي

$$nP_{n-1} = P'_n - xP'_{n-1} \quad (*)$$

$$\text{By (2)} \quad xP'_n - P'_{n-1} = nP_n$$

بالضرب في  $x$  نحصل علي

$$x^2 P'_n - xP'_{n-1} = n xP_n \quad (**)$$

بالتعويض من  $(**)$  في  $(*)$  نحصل علي  $(1 - x^2) P'_n = n(P_{n-1} - xP_n)$

$$6. (1 - x^2) P'_n = (n + 1)(xP_n - P_{n+1})$$

Proof

$$\text{By (1) } (2n + 1)xP_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$$

$$(n + 1)xP_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1} - nxP_n$$

$$(n + 1)(xP_n - P_{n+1}) = n(P_{n-1} - xP_n)$$

$$\text{By (5) } (n + 1)(xP_n - P_{n+1}) = (1 - x^2) P'_n$$

## Orthogonally of $P_n(x)$

التعامد لدالة لاجندر

$$\int_{-1}^1 P_m P_n dx = 0 \quad \text{if } n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 P_m P_n dx = \frac{2}{2n+1} \quad \text{if } n = m$$

التعامد مهم جدا بدون اثبات

**Example:**

$$\int_{-1}^1 P_2 P_3 dx = 0,$$

$$\int_{-1}^1 P_3 P_3 dx = \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{2}{7}$$

مطلوب الأمثلة المحلوله فقط  
واي أسئلة ممكن نتناقش فيها ع جروب الواتساب



كن متفائلاً.  
ودمتم سالمين



شكراً لكم  
مع أمنياتي بالنجاح والتوفيق