

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الدوال الخاصة  
كلية العلوم – الفرقة الرابعة – قسم الرياضيات  
المحاضرة التاسعة والعاشره  
دالة شيفشيف

د. هدي حمدان مرداش

2020

# Chebyshev Polynomials (book page 71)

## حل المعادلة التفاضلية

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

يسمي كثيرات الحدود شيبشيف.

● كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الأول  $T_n$

$$T_n = y = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (\text{تحفظ})$$

● كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني  $U_n$

$$U_n = y = \sin(n \cos^{-1} x) \quad (\text{تحفظ})$$

$$\diamond \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\diamond \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\diamond \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\diamond \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\diamond \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\diamond \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\diamond \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x \quad \sin(2\pi - x) = -\sin x$$

◆ If none of the angles  $x, y$  and  $(x \pm y)$  is an odd multiple of  $\frac{\pi}{2}$ , then

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\diamond \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

◆ If none of the angles  $x, y$  and  $(x \pm y)$  is a multiple of  $\pi$ , then

$$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

$$\diamond \cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

$$\diamond \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

## ملحوظة: الإثبات غير مطلوب

تذكر الدوال المثلثية الآتية:

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

## Chebyshev Polynomials

$$T_n = y = \cos(n \cos^{-1} x)$$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الأول نقوم بالتعويض عن قيم  $n$  كالآتي:  
(بفرض أن  $\theta = \cos^{-1} x$ ,  $x = \cos \theta$  ثم تحول بدلالة  $x$ )  
(لاحظ ان أي  $T_n$  تكون بدلالة  $\cos \theta$ )

$$n = 0, T_0(x) = \cos 0 = 1$$

$$n = 1, T_1 = \cos(\cos^{-1} x) = x$$

$$n = 2, T_2 = \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1$$

$$n = 3, T_3 = \cos 3\theta$$

$$= \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$= (2 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta - (2 \cos \theta \sin \theta) \sin \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^3 \theta - \cos \theta - 2 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4x^3 - 3x.$$

$$n = 4, T_4 = \cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1 = 2 (2x^2 - 1)^2 - 1$$

$$= 8x^4 - 8x^2 + 1$$

وهكذا يمكن الحصول علي  $T_5, T_6, T_7, \dots$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الثاني نقوم بالتعويض عن قيم  $n$  كالآتي: (بفرض أن  $\theta = \cos^{-1} x, x = \cos \theta$ )  
 (لاحظ أن اي  $U_n$  تكون بدلالة  $\sin \theta$  ثم تحول بدلالة  $x$ )

كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني  $U_n$   
 $U_n = y = \sin (n \cos^{-1} x)$

$$\mathbf{n} = \mathbf{0}, U_0(x) = \sin 0 = 0$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{1}, U_1 = \sin(\cos^{-1} x) = \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{2}, U_2 = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2x \sqrt{1 - x^2}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{3}, U_3 = \sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin \theta$$

$$= 4 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta$$

$$= 4 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta$$

$$= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$= \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta)$$

$$= \sqrt{1 - x^2} (4x^2 - 1)$$

n	$T_n$	$U_n$
0	1	1
1	X	$\sqrt{1 - x^2}$
2	$2x^2 - 1$	$2x\sqrt{1 - x^2}$
3	$4x^3 - 3x$	$\sqrt{1 - x^2} (4x^2 - 1)$

هذا الجدول للتوضيح وليس للحفظ. حيث يمكن أستنتاج أي قيمة كما سبق بتوضيح بعض الأمثلة.

$$\begin{aligned} n = 4, T_4 &= \cos 4\theta = 2 \cos^2 2\theta - 1 = 2 (2x^2 - 1)^2 - 1 \\ &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

وهكذا يمكن الحصول علي  $T_5, T_6, T_7, \dots$

لايجاد قيم دوال شيبشيف من النوع الثاني نقوم بالتعويض عن قيم  $n$  كالآتي: (بفرض أن  $\theta = \cos^{-1} x, x = \cos \theta$ )

كثيرات الحدود شيبشيف من النوع الثاني  $U_n$

$$U_n = y = \sin (n \cos^{-1} x)$$

$$n = 0, U_0(x) = \sin 0 = 0$$

$$n = 1, U_1 = \sin (\cos^{-1} x) = \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$n = 2, U_2 = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2x \sqrt{1 - x^2}$$

$$\begin{aligned} n = 3, U_3 &= \sin 3\theta = \sin (2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$



**طريقة أخرى** للحصول علي قيم دالة شيبشيف من النوع الأول وذلك من خلال  
المحدد الآتي (من السهل جدا حفظه)

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For n = 1  $T_1(x) = x$

For n = 2  $T_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - 1$

For n =1

$$\begin{array}{c} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 2x \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \end{array} \right.$$

For n =2

$$\begin{array}{c} x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2x \end{array} \right.$$

For  $n = 3$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

For  $n = 4$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

The generating function of  $T_n(x)$  is  $\frac{1-2z}{1-2xz+z^2}$   
**Keep it, the proof for reading**

لاحظ أن: دالة شيبشيف دالة في متغير واحد  $x$   
أما الدالة المولدة لدالة شيبشيف فهي دالة في متغيرين  $(x, z)$

## Orthogonality of $T_n(x)$

$$1. \int_{-1}^1 \frac{T_n T_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \text{if } m \neq n$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{T_n T_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{if } m = n \neq 0$$

$$3. \int_{-1}^1 \frac{T_n T_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \quad \text{if } m = n = 0$$

الاثبات سهل جدا واضح في الكتاب لشعبة الرياضيات

## Examples for orthogonality of $T_n(x)$

$$1. \int_{-1}^1 \frac{T_3 T_2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{T_7 T_{11} dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$3. \int_{-1}^1 \frac{T_2 T_2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{T_0 T_0 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

## Orthogonality of $U_n(x)$

$$1. \int_{-1}^1 \frac{U_n U_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \text{if } m \neq n$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{U_n U_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{if } m = n \neq 0$$

$$3. \int_{-1}^1 \frac{U_n U_m dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \text{if } m = n = 0$$

الاثبات أيضا سهل جدا واضح في الكتاب لشعبة الرياضيات

# Recurrence Relations

1.  $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$

2.  $(1 - x^2)T'_n = nT_{n-1} - nxT_n$

3.  $U_{n+1} + U_{n-1} = 2xU_n$

4.  $(1 - x^2)U'_n = nxU_n - nU_{n-1}$



$$1. T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$$

**Proof**

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

$$\theta = \cos^{-1} x, \cos \theta = x$$

$$T_n(x) = \cos(n \theta)$$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$$

$$= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta)$$

$$= \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$\therefore T_{n+1} + T_{n-1} = 2\cos\theta \cos(n\theta) = 2xT_n.$$

$$2. (1 - x^2)T'_n = n T_{n-1} - nx T_n$$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$T'_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 - x^2} T'_n(x) = n \sin n\theta$$

بالضرب في  $\sqrt{1 - x^2}$

$$(1 - x^2)T'_n = n \sqrt{1 - x^2} \sin n\theta$$

$$(1 - x^2)T'_n = n \sin\theta \sin n\theta$$

$$= n T_{n-1} - nx T_n$$

$$; T_{n-1}(x) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$= x T_n + \sin(n\theta)\sin\theta$$

$$\sin(n\theta)\sin\theta = T_{n-1} - x T_n$$

بالنسبة لاثبات (3) بنفس طريقة (1) و(4) بنفس طريقة (2) ولكن باستخدام النوع الثاني.

دالة شيبشيف تعتبر أسهل الدوال من حيث العلاقات والاثبات والمسائل.

مطلوب من جميع الشعب الأمثلة المحلولة فقط.

يوجد الكثير من الدوال الخاصة مثل الدالة الفوق زائدية والدالة

الهرميتية وغيرها الكثير. ولكن كما هو واضح لكم فان طريقة التعامل

مع الدوال الخاصة لا تختلف كثيراً عن بعضها.

نلتقي بكم علي خير. وأتمني لكم جميعاً دواء

الصحة والعافية .

كل عام وانتم بخير

ودمتو سالمين

مع أطيب الرجاء بالنجاح والتوفيق